Title	非線型Schrodinger方程式の量子論 : Gel'fond=Levitan方程式と古典ソリトン解(場の理論,基研研究会「ソリトン系のダイナミクスとそれに関するカオスの問題」,研究会報告)
Author(s)	国場, 敦夫; 小西, 哲郎; 和達, 三樹
Citation	物性研究 (1985), 45(1): 23-25
Issue Date	1985-10-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/91820
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

$$\omega=\frac{A}{k}, \tag{3}$$

ここで，Aは定数である．従って，$p>0$となる．次に，波の振巾に伴う周波数シフトを求める．Fig.1およびFig.2を詳細に観測すると振巾が大きくなるにつれて，キャリア波の周波数は低くなっている．従って，$q>0$となる．以上より，$pq>0$となり，包絡ソリトンが形成されることが期待される．Fig.1およびFig.2の結果は変調不安定および包絡ソリトンが形成されることによると推論される．

参考文献

1) N. L. Oleson and A. W. Looper, Adv. Electron. Electron Phys. **24** 155 (1968).
2) V. I. Karpman, *Nonlinear Waves in Dispersive Media* (Pergamon, Oxford, 1975) p106.
3) M. Y. Su, Phys. Fluids **25**, 2167 (1982).

非線型Schrödinger方程式の量子論
－Gel' fond=Levitan方程式と古典ソリトン解－[1)]

東大教養　国場敦夫，小西哲郎，和達三樹

非線型Schrödinger方程式

$$i\phi_t+\phi_{xx}-2\kappa\phi^{+}\phi\phi=0 \tag{1}$$

は逆散乱法により解くことができる.[2),3)] 完全可積分性のあらわれとして，この方程式には無限個の保存量が付随し，引力型（$\kappa<0$）の時，ブライトソリトン解[2)]，斥力型（$\kappa<0$）の時，ダークソリトン解[3)]を持っている．

この系を量子化すると[4)]，デルタ関数で相互作用するボーズ粒子系となるが，この量子化されたモデルにおいても無限個の保存量が存在する．即ち(1)は量子論的にもソリトン系である．我々は(1)で$\kappa<0$（引力型）の場合に量子逆散乱法[5)]をapplyした．この方法の一つの特徴は，(1)を考える代わりにそれと等価なLax-pairを用いて場の理論を展開する所にある．即ち，(1)のfield ϕをpotentialとするspectrum parameter λの線型補助問題を考え，その補助場（ヨスト演算子）の遠方での極限として散乱データ演算子$A(\lambda)$，$B(\lambda)$を定義すると$A(\lambda)$は保存し，

$[H, B^{+}(\lambda)] = -\lambda^2 B^{+}(\lambda)$（但し，$H$は(1)のHamiltonian）となることがわかる．従って$A(\lambda)$の$1/\lambda$展開から無限個の保存量が得られ，$B^{+}(\lambda)$は従来のBethe状態の生成演算子であることがわかる．[6] さらに反射係数演算子，$R^{+}(\lambda) = \mathrm{i}\,|\kappa|^{-1/2} B^{+}(\lambda)(A(\lambda))^{-1}$を定義すると，次のような特徴的な交換関係を得る．

$$
\begin{aligned}
&R^{+}(\lambda)\,R^{+}(\mu) = S(\mu, \lambda)\,R^{+}(\mu)\,R^{+}(\lambda) \\
&R(\lambda)\,R^{+}(\mu) = S(\lambda, \mu)\,R^{+}(\mu)\,R(\lambda) + 2\pi\delta(\lambda - \mu)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

ここで，$S(\lambda, \mu) = (\lambda - \mu - \mathrm{i}\kappa)/(\lambda - \mu + \mathrm{i}\kappa)$は2体の$S$行列であり，(2)式はZamolod-chikovらの仮定した“Symbolic algebra”[7]の実例となっている．

引力型の時の特徴は，spectrum parameter λ（粒子の運動量に相当する）がある特殊な複素数の配位をとることが許される点にある．これはnケの粒子の運動量が

$$
\begin{aligned}
&p_j = p + \frac{i}{2}\kappa(n + 1 - 2j) \\
&\qquad p : \text{real},\ j = 1, 2, \cdots, n
\end{aligned}
$$

となる場合で，n-string状態と呼んでいる．（以下$|\,n, p>$と書く）物理的には運動量pを持ち，$1/\kappa$くらいの拡がりを持ったn粒子束縛状態である．(1)式の古典ソリトン解の局在性は，この量子論的束縛状態の古典極限に対応していると考えられる．このことを示すには，field ϕのn-string状態での“期待値”

$$
< n, p' \,|\, \phi(x) \,|\, n+1, p > \tag{3}
$$

を計算し，実空間にフーリエ変換して，(1)の古典解と比べてみればよい．(3)式の計算は，以前はBethe波動関数を用いて行なわれていたが，[8] 量子Gel' fand-Levitan方程式[9]（以下QGLE）を用いると，nに対する漸化式が得られ見通しよく遂行できることがわかった．さらにQGLEは計算結果をcompactにし，(3)は実は次のような単項式にfactorizeしてしまうことがわかる．

$$
\begin{aligned}
&< np' \,|\, \phi(x) \,|\, n+1, p > \\
&= n!\,(n-1)!\,|\kappa|^{2n-\frac{1}{2}} e^{\mathrm{i}\{(n+1)p - np'\}x} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{(p-p')^2 + \frac{\kappa^2}{4}(2n-2j+1)^2}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

(4)は，“量子ソリトン”の実空間での波形が$2n$個のpoleからの寄与によることを示している．また，(4)を実空間に戻し，$n \to \infty$としてやると古典ソリトン解

$$\phi_s(x, t) = \frac{2\eta}{|\kappa|^{1/2}} \exp(4 i \eta^2 t + i\theta_0) \operatorname{sech}(2\eta x)$$

が出てくる．但し$4\eta = |\kappa|(n+1)$とおいた．さらに，ϕをはさむ状態をガリレイ変換すれば，movingソリトンも得られる．即ち，量子論で束縛状態をつくる粒子数nを無限大にするとその状態に関する$\phi(x)$の形状因子が古典ソリトン解になる．これはGoldstoneとJackiwの予想[10]の一端と思われる．nが有限の時の波形をグラフにすると，$n=5\sim6$くらいですでにsechに近く，$n\rightarrow$大につれ，古典的波形に近づく様子がわかる．

参考文献

1) M. Wadati et al., Journal of Phys. Soc. Jpn to appear.
2) V. E. Zakharov et al., Sov. Phys. JETP **34** (1972) 62.
3) V. E. Zakharov et al., Sov. Phys. JETP **37** (1973) 823.
4) I. B. McGulie, J. Math. Phys. **6** (1965) 432.
E. H. Lief and W. Liniger, Phys. Rev. **130** (1963) 1605.
5) H. B. Thacker, Rev. Mod. Phys. **53** (1981) 253.
6) A. Wissler, J. Math. Phys. **22** (1981) 750.
Y. Akutsu, unpublished.
7) A. B. Zamolodchikov et al.; Ann. Phys. **120** (1979) 253.
8) M. Wadati and M. Sakagami, J. Phys. Soc. Jpn. **53** (1984) 1983.
9) M. Göckeler, Z. Phys. **C7** (1981) 263, **11** (1981) 125.
F. A. Smirnov, Dokl. Akad. Nauk SSSR **262** (1982) 78.
10) J. Goldstone and R. Jackiw, Phys. Rev. **D11** (1975) 1486.

二成分非線型シュレディンガーモデルの量子逆散乱法

東大・教養　鈴　木　康　夫

量子非線型シュレディンガーモデルのハミルトニアンは，

$$H = \int dx\,(u_x^+ u_x + \kappa : u^+ u u^+ u :) \tag{1}$$

であるが，このuを$u=(\phi_1, \phi_2)$と二成分に拡張したモデルの量子逆散乱法（Q.I.S.M.）