

$$f_n = \text{const} \cdot \frac{(m+1)!}{(2n+m)!} \rho^n \cdot \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \rho^{2k}}{2^k k!} \frac{(2n+m+1)}{(2k+2n+m)!} \right],$$

である。以下(6)を満たす任意の w_n に対して、同様な方法で解を構成することができる。

§5. Bäcklund 変換

整合条件(6)は、 $w_n = e^{-y_n}$, なる変換で

$$y_n'' + \frac{1}{\rho} y_n' + e^{-y_{n-1}+y_n} - e^{-y_n+y_{n+1}} = 0,$$

となるが、これは2次元戸田格子(1)に他ならない。(但し、 $e^{-(y_n-y_{n-1})} - 1 = -\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}\right) \log f_n$) 従って、(6)~(11)は2次元戸田格子のある種の Bäcklund 変換を与えると考
えることができる。

文献

A. Nakamura, J. Phys. Soc. Jpn. 52 (1983) 380.

円形対称な高次の水の波のソリトン

大阪外大・一般教育 物理 中村 明

ソリトン研究において、1+1次元(空間1+時間1次元)のものは、よく研究されてきたが、高次元のソリトンについては、わからないことがいっぱいある。これにまとをしぼって、
筆者は、ここ数年いろいろとアタックしてきた。具体的な例をつみあげることによって、あら
われたイメージが、いわゆる、“爆発-減衰”ソリトンである。これは、もともと円形KdV方
程式

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} + u/(2t) = 0, \quad (1)$$

のソリトンの性質から、でてきたものである。静かな池に石を投げたと考えよう。このとき円
形の波が、ひろがってゆく。ふだんの経験からしるように、円形の波の高さは、時間的にかわ
ってゆき、ある一定の値にとどまることがない。このたとえでは、波の高さが“減衰”するソ

ソリトンだが、この時間的に逆のプロセスを考えると、“爆発”するソリトンとなる。よってひっくり返して、“爆発-減衰”ソリトンとのなまえをつける。このようなタイプのソリトンの具体的な例は、いくつぐらいみつかったらだろうか？それらをリストアップしてみると、つぎのようになる。

- 1) 円形KdV式,^{1,2,3)}
- 2) 2+1次元KdV式,⁴⁾
- 3) 2+1次元の連立の非線形シュレーディンガー式,^{5,6)}
- 4) 2+1次元 Toda 方程式 (円形 Toda 方程式),⁷⁾
- 5) 円形の高次水の波方程式。⁸⁾

1)と2)はかんたんな変数のかきかえでむすばれるので、本質的にはおなじものとおもってよい。ただし2)のほうは、物理的なパラメーターでいうと、空間の縦方向、横方向 (x と y 座標)について、対称性をもたない方程式である。上のリストの最後のもの、5)が今回みつけだされたものである。これは Kaup の高次の水の波の式の円形版であり、次の形をもつ、

$$\begin{cases} \pi_t - (\pi \phi_x - \phi_{xxx})_x + \pi/t = 0, & (2a) \\ \pi - \phi_t + \phi_x^2/2 = 0. & (2b) \end{cases}$$

これは、極限で、円形KdV式(1)に、もどることが示せる。⁸⁾この式は、つぎのソリトンのこたえをもつことが確かめられた、⁸⁾

$$\begin{aligned} \pi &= -2(\log fg)_{xx}, \quad \phi = -2i(\log f/g), \\ f &= B^2(z) - i(\operatorname{sgn} t)(z^2 B^2(z) + B'(z)^2), \quad g = f^*, \\ z &\equiv x/\sqrt{4|t|}, \quad d^2 B^2(z)/dz^2 + z^2 B(z) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

ここで $B(z)$ は、ベッセル関数(の線形結合)を用いて、あらわすことができる、

$$\begin{aligned} B(z) &= b_+ B_+(z) + b_- B_-(z), \quad B_{\pm}(z) = z^{1/2} J_{\pm 1/4}(z^2/2), \\ b_{\pm} &= \text{arbitrary constants.} \end{aligned} \quad (4)$$

くわしく調べると、このこたえは確かに位置座標 $\rightarrow +\infty$ で、波の高さがゼロになることも確かめられる。以上ここでのべた(2a, b)式とそのソリトンのこたえは有名な円形KdV方程式のひとつの一般化されたものである。おもしろいことに、ここのソリトンもまたベッセル関数であらわされているが、これは1983年の Nakamura の予想⁷⁾ “2+1次元の爆発-減衰ソリトンは、つねにベッセル関数などの特殊関数であらわされるであろう” というものに、またもやピ

研究会報告

ツタリとあてはまっている。高い次元のソリトンでは、ふえた次元のぶんだけ自由度がふえるせいか、波の形も刻々かわりゆくし、また、そのうえにも、まだまだおもしろい多様な現象があらわれそうである。ここ20年の間に、空間1次元のソリトン理論は、ものすごく発達したわけだが、高い空間次元のソリトンについては、まだまだの感がある。多次元のソリトンの研究のふたは、いままさに、あけられたばかりではないだろうか？

参考文献

- 1) S. Maxon and J. Viecelli, *Phys. Fluids* **17** (1974) 1614.
- 2) F. Calogero and A. Degasperis, *Lett. Nuovo Cimento* **23** (1978) 150.
- 3) A. Nakamura, *J. Phys. Soc. Jpn.* **49** (1980) 2380.
- 4) R. S. Johnson and S. Thompson, *Phys. Lett.* **66A** (1978) 279.
- 5) A. Nakamura, *Phys. Lett.* **88A** (1982) 55.
- 6) A. Nakamura, *J. Phys. Soc. Jpn.* **52** (1983) 3713.
- 7) A. Nakamura, *J. Phys. Soc. Jpn.* **52** (1983) 380.
- 8) A. Nakamura, *J. Phys. Soc. Jpn.* **54** (1985) No. 6 to appear.

拡張された Harry Dym 方程式

川 本 俊 治

与えられた非線形偏微分方程式が逆散乱法で解けるということと、その相似解がパンルベ (Painlevé) 方程式を満足するということの密接なつながりが指摘されて以来、¹⁾ いわゆる“パンルベ解析”が、与式の可積分性を調べる有力な手段となってきた。

そもそもこの解析は、相似解²⁾と50種のパンルベ型2階常微分方程式³⁾との関係の議論に始まり、その後 Weiss et al.⁴⁾によって、与式を常微分方程式に変換せずに偏微分方程式のままパンルベの性質の有無を調べる手法へと発展させられた。最近では、多くのソリトン方程式がパンルベ解析されている。^{4, 5)}ここでいうパンルベの性質とは、パンルベ型方程式の解が持つ特異点の性質、という意味である。すなわち、一般に非線型方程式の解の特異点の位置は、その積分定数によって“動きうる (movable)”と考えられるが、パンルベ型方程式は、動きうる真性特異点や分岐点 (movable critical points) を持たない式として知られている。したがって、