Title	円形対称な高次元の水の波のソリトン(classical solitons I.,基研研究会「ソリトン系のダイナミクスとそれに関するカオスの問題」,研究会報告)
Author(s)	中村, 明
Citation	物性研究 (1985), 45(1): 16-18
Issue Date	1985-10-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/91823
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

$$f_n = \mathrm{const}\cdot\frac{(m+1)!}{(2n+m)!}\rho^n\cdot\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\rho^{2k}}{2^k k!}\frac{(2n+m+1)}{(2k+2n+m)!}\right],$$

である．以下(6)を満たす任意の w_n に対して，同様な方法で解を構成することができる．

§5. Bäcklund変換

整合条件(6)は，$w_n=\mathrm{e}^{-y_n}$，なる変換で

$$y_n''+\frac{1}{\rho}y_n'+\mathrm{e}^{-y_{n-1}+y_n}-\mathrm{e}^{-y_n+y_{n+1}}=0,$$

となるが，これは２次元戸田格子(1)に他ならない．（但し，$\mathrm{e}^{-(y_n-y_{n-1})}-1=-\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\right)\log f_n$）従って，(6)〜(11)は２次元戸田格子のある種のBäcklund変換を与えると考えることが出来る。

文献

A. Nakamura, J. Phys. Soc. Jpn. **52** (1983) 380.

円形対称な高次の水の波のソリトン

大阪外大・一般教育　物理　中　村　　　明

ソリトン研究において，１＋１次元（空間１＋時間１次元）のものは，よく研究されてきたが，高次元のソリトンについては，わからないことがいっぱいある．これにまとをしぼって，筆者は，ここ数年いろいろとアタックしてきた．具体的な例をつみあげることによって，あらわれたイメージが，いわゆる，“爆発－減衰”ソリトンである．これは，もともと円形KdV方程式

$$u_t+6uu_x+u_{xxx}+u/(2t)=0, \tag{1}$$

のソリトンの性質から，でてきたものである．静かな池に石を投げたと考えよう．このとき円形の波が，ひろがってゆく．ふだんの経験からしるように，円形の波の高さは，時間的にかわってゆき，ある一定の値にとどまることがない．このたとえでは，波の高さが“減衰”するソ

リトンだが，これの時間的に逆のプロセスを考えると，“爆発”するソリトンとなる．よってひっくるめて，“爆発－減衰”ソリトンとのなまえをつける．このようなタイプのソリトンの具体的な例は，いくつぐらいみつかってきただろうか？それらをリストアップしてみると，つぎのようになる．

1）円形KdV式,[1,2,3]

2） 2＋1次元KdV式,[4]

3） 2＋1次元の連立の非線形シュレーディンガー式,[5,6]

4） 2＋1次元 Toda 方程式（円形 Toda 方程式）,[7]

5）円形の高次水の波方程式.[8]

1）と2）はかんたんな変数のかきかえでむすばれるので，本質的にはおなじものとおもってよい．ただし2）のほうは，物理的なパラメーターでいうと，空間の縦方向，横方向（xとy座標）について，対称性をもたない方程式である．上のリストの最後のもの，5）が今回みつけだされたものである．これはKaupの高次の水の波の式の円形版であり，次の形をもつ，

$$\left\{\begin{array}{ll} \pi_t-(\pi\phi_x-\phi_{xxx})_x+\pi/t=0, & \qquad (2a) \\ \pi-\phi_t+\phi_x^2/2=0. & \qquad (2b) \end{array}\right.$$

これは，極限で，円形KdV式(1)に，もどることが示せる.[8] この式は，つぎのソリトンのこたえをもつことが確かめられた,[8]

$$\begin{aligned} &\pi=-2(\log fg)_{xx},\quad \phi=-2\mathrm{i}(\log f/g), \\ &f=B^2(z)-\mathrm{i}(\operatorname{sgn} t)(z^2B^2(z)+B'(z)^2),\quad g=f^*, \\ &z\equiv x/\sqrt{4|t|},\quad \mathrm{d}^2B^2(z)/\mathrm{d}z^2+z^2B(z)=0. \end{aligned} \tag{3}$$

ここで$B(z)$は，ベッセル関数（の線形結合）を用いて，あらわすことができる，

$$\begin{aligned} &B(z)=b_+B_+(z)+b_-B_-(z),\quad B_\pm(z)=z^{1/2}J_{\pm1/4}(z^2/2), \\ &b_\pm=\text{arbitrary constants.} \end{aligned} \tag{4}$$

くわしく調べると，このこたえは確かに位置座標→＋∞で，波の高さがゼロになることも確かめられる．以上ここでのべた（2a，b）式とそのソリトンのこたえは有名な円形KdV方程式のひとつの一般化されたものである．おもしろいことに，ここのソリトンもまたベッセル関数であらわされているが，これは1983年のNakamuraの予想[7] “2＋1次元の爆発－減衰ソリトンは，つねにベッセル関数などの特殊関数であらわされるであろう”というものに，またもやピ

ッタリとあてはまっている．高い次元のソリトンでは，ふえた次元のぶんだけ自由度がふえるせいか，波の形も刻々かわりゆくし，また，そのうえにも，まだまだおもしろい多様な現象があらわれそうである．ここ20年の間に，空間1次元のソリトン理論は，ものすごく発達したわけだが，高い空間次元のソリトンについては，まだまだの感がある．多次元のソリトンの研究のふたは，いままさに，あけられたばかりではないだろうか？

参考文献

1) S. Maxon and J. Viecelli, Phys. Fluids **17** (1974) 1614.
2) F. Calogero and A. Degasperis, Lett. Nuovo Cimento **23** (1978) 150.
3) A. Nakamura, J. Phys. Soc. Jpn. **49** (1980) 2380.
4) R. S. Johnson and S. Thompson, Phys. Lett. **66A** (1978) 279.
5) A. Nakamura, Phys. Lett. **88A** (1982) 55.
6) A. Nakamura, J. Phys. Soc. Jpn. **52** (1983) 3713.
7) A. Nakamura, J. Phys. Soc. Jpn. **52** (1983) 380.
8) A. Nakamura, J. Phys. Soc. Jpn. **54** (1985) No. 6 to appear.

拡張されたHarry Dym方程式

川　本　俊　治

与えられた非線形偏微分方程式が逆散乱法で解けるということと，その相似解がパンルベ(Painlevé) 方程式を満足するということの密接なつながりが指摘されて以来，[1]いわゆる“パンルベ解析”が，与式の可積分性を調べる有力な手段となってきている．

そもそもこの解析は，相似解[2]と50種のパンルベ型2階常微分方程式[3]との関係の議論に始まり，その後Weiss et al.[4]によって，与式を常微分方程式に変換せずに偏微分方程式のままでパンルベの性質の有無を調べる手法へと発展させられた．最近では，多くのソリトン方程式がパンルベ解析されている．[4,5]ここでいうパンルベの性質とは，パンルベ型方程式の解が持つ特異点の性質，という意味である．すなわち，一般に非線型方程式の解の特異点の位置は，その積分定数によって“動きうる(movable)”と考えられるが，パンルベ型方程式は，動きうる真性特異点や分岐点 (movable critical points) を持たない式として知られている．したがって，