$$\sum_{n_r=0}^{\infty} e^{-zn_r\varepsilon_r} = (1 - e^{-z\varepsilon_r})^{-1} \qquad (\varepsilon_r = 2\pi \tan \frac{\pi r}{2N})$$

の寄与をするからである．励起は粒子数に制限のないボーズ統計に従う（$n_r = 0, 1, \cdots, \infty$）．準位の数は格子の粒子数$2N$の半分（$r = 1, 2, \cdots, N$）である．非線形格子の励起がこのような重畳原理にしたがうのはなぜか．

これらの点が解明されないので，とりあえず(8)式を数値的に確かめることにした．

| | (8)式の右辺の値 $\left[\prod_{r=1}^{N} \{1 - \exp(-2\pi z \tan \frac{\pi r}{2N})\}\right]^{-1/2N}$ | | | | (4)式の値 $\sqrt{\frac{z}{2\pi}}Q(z)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $N=9$ | $N=18$ | $N=45$ | $N=90$ | |
| $z=1$ | 1.030 | 1.048 | 1.064 | 1.072 | 1.084 |
| $z=2$ | 1.007 | 1.016 | 1.027 | 1.033 | 1.042 |
| $z=3$ | 1.002 | 1.007 | — | — | 1.030 |

収束はあまりよくない．ことに大きな$z$の値をこの無限乗積で計算するのは困難である．しかし，いずれにせよ(8)式は数値的に確かめられたといってよいであろう．

### 文献

1) E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis,* (1927) p. 251.

# 二次元戸田格子のBessel関数的な解

横浜国大・工　斉藤　革子，滝澤　英一

京都工繊大・工芸　武　野　正　三

## §1. 序

二次元戸田格子のStaticな運動は，円筒対称座標で，動径方向に関して，

$$f_n\left(\frac{d^2 f_n}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d f_n}{d\rho}\right) - \left(\frac{d f_n}{d\rho}\right)^2 - [f_{n+1} f_{n-1} - f_n^2] = 0 \tag{1}$$

と表わされる．但し，$\rho$は動径である．この方程式は，Bessel関数$J_n(\rho)$及び

$$f_n(\rho)=1+\varepsilon\sum_{m=n}^{\infty}J_m^2(\rho),\qquad (\varepsilon\text{は任意})$$

を解に持つことが中村氏によって示された.*) この他にも(1)は以下のような解をもっている．

$$f_n(\rho)=\mathscr{L}_{\pm n+\alpha}(\rho),\qquad (\text{円筒関数})$$

$$f_n(\rho)=c+\varepsilon\sum_{k=0}^{\infty}\mathscr{L}^2_{\pm n+\alpha+k}(\rho),\qquad (c,\ \alpha,\ \varepsilon\text{は任意})$$

$$f_n(\rho)=Z_{\pm n+\alpha}(\rho),\qquad (\text{球 Bessel 関数})$$

$$f_n(\rho)=c\frac{\pi}{2\rho}+\varepsilon\sum_{k=0}^{\infty}Z^2_{\pm n+\alpha+k}(\rho).\qquad (c,\ \alpha,\ \varepsilon\text{は任意})\qquad \text{etc.}$$

以上のような様々な解をsystematicに観る事，または，Bessel関数がどのようにして解であるかをsystematicに観ることが，我々の目的である．

## §2. Recursion Formulaと二次元戸田格子

上の観点からの一つの考察として，以下の事を考えてみる．即ち，$p_n$, $q_n$, $r_n$, $s_n$を$\rho$の任意の関数として，

$$\begin{cases} f_n=p_nf_{n+1}+q_nf_{n-1}, & (2)\\ f'_n=r_nf_{n+1}+s_nf_{n-1}, & (3)\end{cases}$$

なるRecursion Formulaeを考える．(2), (3)によって，問題の非線形bilinear方程式は

$$f_n(f''_n+kf'_n+f_n)-(f'_n)^2-f_{n+1}f_{n-1}$$
$$=f_n[f''_n+kf'_n-\frac{p_ns_n+q_nr_n}{\varDelta_n^2}f'_n+f_n+\frac{r_ns_n}{\varDelta_n^2}f_n]-f_n'^2[1-\frac{p_nq_n}{\varDelta_n^2}]=0, \qquad (1)'$$

と変形される．ここで$\varDelta_n\equiv p_ns_n-q_nr_n$．いま，

$$\varDelta_n^2=p_nq_n, \qquad (4)$$

とおくと，(1)′はdecoupleされて

$$f_n'' + \left(k - \frac{p_n s_n + q_n r_n}{\Delta_n^2}\right) f_n' + \left(1 + \frac{r_n s_n}{\Delta_n^2}\right) f_n = 0, \tag{5}$$

に帰着する．従って，(1)を解く一つの方法は，条件(2), (3), (4)の下で線形方程式(5)を解くことである．これは，少し問題をすりかえると，「如何なる $p_n$, $q_n$, $r_n$, $s_n$ の組に対して，線形方程式(5)の解がRecursion Formulae (2)と(3)を同時に満たすか，従って，非線形方程式(1)の解になるか.」という問題になる．

## §3. 整合条件

さて，先に述べた問題を解くに当って，以下のようなことを考える．Recursion Formulae は

$$\begin{cases} f_{n+1} = \dfrac{1}{\Delta_n}\left(s_n f_n - q_n f_n'\right), & (2)' \\[2ex] f_{n-1} = -\dfrac{1}{\Delta_n}\left(r_n f_n - p_n f_n'\right), & (3)' \end{cases}$$

と書けるが，これの変形による２階線形微分方程式の作り方には少くとも２通りある．即ち，

1） $f_n = f_n(f_{n-1}, f_{n-1}')$
$\quad = f_n(f_{n-1}(f_n, f_n'),\ f_{n-1}'(f_n', f_n''))$,

2） $f_n = f_n(f_{n+1}, f_{n+1}')$
$\quad = f_n(f_{n+1}(f_n, f_n'),\ f_{n+1}'(f_n', f_n''))$.

そこで，問題を解く為には，次の二つの事が整合条件として必要である．即ち，

［１］　1）と 2）が同一の線形方程式を導くこと．

［２］　且つ，この線形方程式が(5)に equivalent であること．

この整合条件の下では，$k = \dfrac{\upsilon}{\rho}$ ($\upsilon$ = const)とおくならば，$\upsilon = 1$ と決まる．従って，この方法では２次元戸田格子のみを扱うことになる．変数を

$$u_n \equiv \frac{r_n}{p_n}, \quad v_n \equiv \frac{s_n}{q_n}, \quad w_n \equiv \frac{p_n}{\Delta_n} = \frac{\Delta_n}{q_n},$$

と定義し直すと，整合条件は

$$(\ln w_n)'' + \frac{1}{\rho}(\ln w_n)' + \left(\frac{w_n}{w_{n+1}} - \frac{w_{n-1}}{w_n}\right) = 0, \tag{6}$$

と書き表わせる．このとき $u_n$, $v_n$ は

$$u_n = \frac{b_n - 2n}{\rho} - \frac{\rho}{2} + \frac{1}{\rho}\int_0^{\rho} d\tilde{\rho}\, \frac{w_{n-1}}{w_n}\tilde{\rho}, \tag{7}$$

$$v_n = \frac{c_n}{\rho} - \frac{\rho}{2} + \frac{1}{\rho}\int_0^{\rho} d\tilde{\rho}\, \frac{w_n}{w_{n+1}}\tilde{\rho}, \tag{8}$$

（$b_n$, $c_n$は積分定数）

で与えられる．線形方程式(5)及びRecursion Formulae(2), (3)は，$u_n$, $v_n$, 及び$w_n$で

$$f_n'' + \left(\frac{1}{\rho} - u_n - v_n\right) f_n' + (1 + u_n v_n) f_n = 0, \tag{9}$$

$$\begin{cases} f_n = \dfrac{\pm 1}{u_n - v_n}\left(w_n f_{n+1} + \dfrac{1}{w_n} f_{n-1}\right), & (10) \\[2ex] f_n' = \dfrac{\pm 1}{u_n - v_n}\left(w_n u_n f_{n+1} + \dfrac{v_n}{w_n} f_{n-1}\right), & (11) \end{cases}$$

と与えられる．但し，このようにして決った$p_n$, $q_n$, $r_n$, $s_n$は，十分条件を満たしていないかもしれないということに注意しなければならない．

## §4. 解の例

$w_n = 1$の場合：

$$u_n = \frac{b_n - 2n}{\rho}, \quad v_n = \frac{c_n}{\rho}, \quad \text{である．}$$

そこで，$c_n = b_n = n$と選べば，円筒関数

$c_n = b_n + 1 = n$と選べば，球Bessel関数

が解の場合に当っている．これを拡張して$c_n = b_n + m = n$と選べば，線形方程式及びRecursion Formulaeは

$$f_n'' + \frac{1+m}{\rho} f_n' + \left(1 - \frac{n(n+m)}{\rho^2}\right) f_n = 0,$$

$$\begin{cases} f_n = \dfrac{\rho}{2n+m}\left(f_{n+1} + f_{n-1}\right), \\[2ex] f_n' = -\dfrac{n+m}{2n+m} f_{n+1} + \dfrac{n}{2n+m} f_{n-1}, \end{cases}$$

で，$f_n$はこれらを同時に満たす故，非線形方程式(1)の解になっている．$\rho = 0$で解析的な解は

$$f_n = \text{const} \cdot \frac{(m+1)!}{(2n+m)!} \rho^n \cdot [1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \rho^{2k}}{2^k k!} \frac{(2n+m+1)}{(2k+2n+m)!}],$$

である．以下(6)を満たす任意の $w_n$ に対して，同様な方法で解を構成することができる．

## §5.　Bäcklund変換

整合条件(6)は，$w_n = \mathrm{e}^{-y_n}$，なる変換で

$$y_n'' + \frac{1}{\rho} y_n' + \mathrm{e}^{-y_{n-1}+y_n} - \mathrm{e}^{-y_n+y_{n+1}} = 0,$$

となるが，これは２次元戸田格子(1)に他ならない．（但し，$\mathrm{e}^{-(y_n-y_{n-1})} - 1 = -\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\right) \log f_n$）従って，(6)〜(11)は２次元戸田格子のある種のBäcklund変換を与えると考えることが出来る。

## 文献

A. Nakamura, J. Phys. Soc. Jpn. **52** (1983) 380.

# 円形対称な高次の水の波のソリトン

大阪外大・一般教育　物理　中　村　　明

ソリトン研究において，１＋１次元（空間１＋時間１次元）のものは，よく研究されてきたが，高次元のソリトンについては，わからないことがいっぱいある．これにまとをしぼって，筆者は，ここ数年いろいろとアタックしてきた．具体的な例をつみあげることによって，あらわれたイメージが，いわゆる，“爆発ー減衰”ソリトンである．これは，もともと円形KdV方程式

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} + u/(2t) = 0, \tag{1}$$

のソリトンの性質から，でてきたものである．静かな池に石を投げたと考えよう．このとき円形の波が，ひろがってゆく．ふだんの経験からしるように，円形の波の高さは，時間的にかわってゆき，ある一定の値にとどまることがない．このたとえでは，波の高さが“減衰”するソ