

Title	非線形格子の特性関数(classical solitons I.,基研研究会「ソリトン系のダイナミクスとそれに関するカオスの問題」,研究会報告)
Author(s)	戸田, 盛和
Citation	物性研究 (1985), 45(1): 10-12
Issue Date	1985-10-20
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/91825">http://hdl.handle.net/2433/91825</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

研究会報告

5. ソリトンとSmC\* - SmC相境界 名大工 山下 護
6. トポロジカルな非線型励起と相転移 阪大教養 川村 光
7. Ising-Heisenberg chainにおけるソリトンの励起 東北大工 猪苗代 盛  
生体系のソリトン
- 1.\*) 神経波解について 広大理 三村 昌 泰
2. スーパーヘリクスDNAの理論 東大教養 鶴 秀生, 和達三樹
3. Solitary excitations in muscle contraction 梶山女学園大 右衛門 佐重雄
4. Polypeptide系と分子結晶におけるvibron soliton 京工織大工芸 武野 正 三  
classical solitons II.
1. Burgers-Hopf 方程式系の佐藤理論による取扱い 早大理工 原田 等
2. KdV方程式の一般的座標変換 広大工 伊藤 雅 明

3月16日(土)

渦のダイナミクス

1. 二次元非線型波動系のトポロジカルな渦のダイナミクス 京大工 石森 勇 次  
ソリトンとカオス
- 1.\*) カオスとフラクタル形成について 京大理 畑 政 義
2. 駆動された非線型Schrödinger方程式における低次元カオス 名大理 野崎一洋, 戸次直明
3. 反応拡散系における衝突波動 大阪教育大 古賀 真 史  
まとめ 東大教養 和達三樹

\*) : 総合講演

## 非線型格子の特性関数

戸田盛和

一般に

$$F(\alpha) = \int e^{-\alpha f(x)} dx = \int e^{-\alpha f} df / \left( \frac{df}{dx} \right) \quad (1)$$

は  $(df/dx)^{-1}$  の特性関数である。そこで非線形格子ポテンシャル

$$\phi(r) = e^{-r} - 1 + r \quad (2)$$

に対する特性関数として

$$Q(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z\phi(r)} dr \quad (3)$$

を考える。簡単な変数変換により

$$Q(z) = e^z z^{-z} \Gamma(z) \quad (4)$$

ここで  $\Gamma(z)$  はガンマ関数である。さらに Binet の第 2 公式<sup>1)</sup>により

$$\log \Gamma(z) = \log(z^z e^{-z}) + \log \sqrt{\frac{2\pi}{z}} + 2 \int_0^{\infty} \frac{\arctan(t/z)}{e^{2\pi t} - 1} dt \quad (5)$$

これを(4)に代入すると

$$Q(z) = \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \int_0^1 \log \{ 1 - e^{-2\pi z \tan(\pi x/2)} \} dx \right] \quad (6)$$

を得る。ここで公式

$$\exp \left[ \int_0^1 \log f(x) dx \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \prod_{r=1}^n f\left(\frac{r}{n}\right) \right]^{1/n} \quad (7)$$

を用いると

$$\sqrt{\frac{z}{2\pi}} Q(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \prod_{r=1}^N \left\{ 1 - \exp\left(-2\pi z \tan \frac{\pi r}{2N}\right) \right\} \right]^{-1/2N} \quad (8)$$

を得る。次の点が問題である。

- (1) Binet の公式は Modern Analysis にあるように証明が大変めんどろであるが、(8)式、あるいはこれに類する式をより簡単に導く方法はないか。
- (2)  $z$  の関数として  $\Gamma(z)$  と(8)式とは解析的な性質が大変異なっているように見えるが、その関係はどうか。
- (3) 線形格子は  $z \gg 1$  の極限と考えることができる。この極限で(8)の右辺は 1 になる。非線形格子の励起 (エネルギー準位) のほかに非線形のポテンシャルに励起

$$U(n_1, n_2, \dots, n_N) = \sum_{r=1}^N n_r 2\pi \tan \frac{\pi r}{2N} \quad (n_r = 0, 1, \dots, \infty)$$

があると考えられる。 $r$  番目の準位は特性関数の因子

$$\sum_{n_r=0}^{\infty} e^{-z n_r \epsilon_r} = (1 - e^{-z \epsilon_r})^{-1} \quad (\epsilon_r = 2\pi \tan \frac{\pi r}{2N})$$

の寄与をするからである。励起は粒子数に制限のないボーズ統計に従う ( $n_r = 0, 1, \dots, \infty$ )。準位の数 は格子の粒子数  $2N$  の半分 ( $r = 1, 2, \dots, N$ ) である。非線形格子の励起がこのような重畳原理にしたがうのはなぜか。

これらの点 が 解明されない ので、とりあえず(8)式を数値的に確かめることにした。

(8)式の右辺の値					(4)式の値
$\left[ \prod_{r=1}^N \left\{ 1 - \exp \left( -2\pi z \tan \frac{\pi r}{2N} \right) \right\} \right]^{-1/2N}$					$\sqrt{\frac{z}{2\pi}} Q(z)$
	$N = 9$	$N = 18$	$N = 45$	$N = 90$	
$z = 1$	1.030	1.048	1.064	1.072	1.084
$z = 2$	1.007	1.016	1.027	1.033	1.042
$z = 3$	1.002	1.007	—	—	1.030

収束はあまりよくない。ことに大きな  $z$  の値をこの無限乗積で計算するのは困難である。しかし、いずれにせよ(8)式は数値的に確かめられたと いうてよいであろう。

文献

- 1) E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, (1927) p. 251.

二次元戸田格子の Bessel 関数的な解

横浜国大・工 齊藤 革子, 滝澤 英一

京都工織大・工芸 武 野 正 三

§ 1. 序

二次元戸田格子の Static な運動は、円筒対称座標で、動径方向に関して、

$$f_n \left( \frac{d^2 f_n}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{df_n}{d\rho} \right) - \left( \frac{df_n}{d\rho} \right)^2 - [f_{n+1} f_{n-1} - f_n^2] = 0 \tag{1}$$