

パターンにおけるサドル族

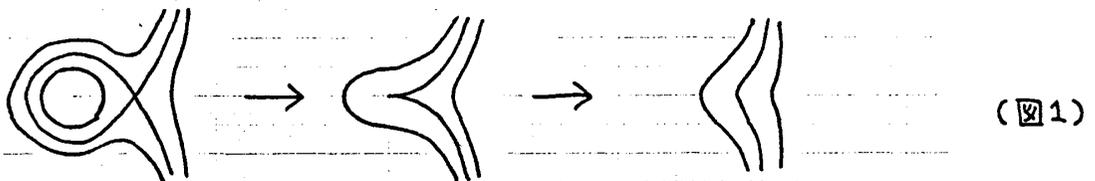
関本 謙 (九大・理)

§1. Introduction

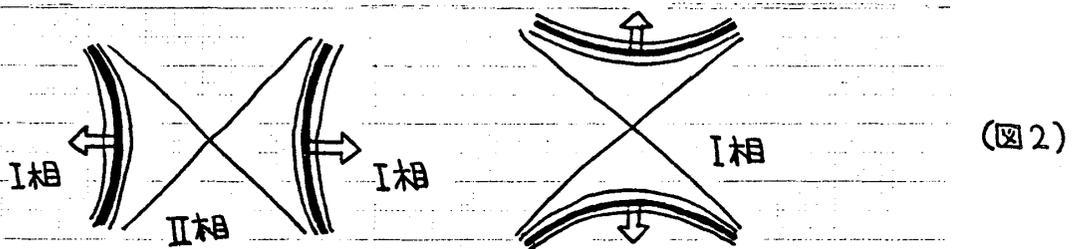
二重に縮退した安定相をもち、秩序変数非保存の系のダイナミクスを考える。

$$\partial_t \phi = - \frac{\delta U}{\delta \phi} \quad ; \quad U = \int \left[\frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + W(\phi) \right] d\vec{x} \quad (1)$$

ϕ は実スカラーで、 $W(\phi)$ は対称な double-minimum ポテンシャル。以下の議論は空間 2次元に限る。この系では、熱揺動が加わっても、一次相転移のときのような核生成は起こらない。孤立した異種相は収縮して消滅するしかない。この過程は $\phi(x,t)$ の等高線で見れば、下図の様に極大点と鞍点の対消滅になる。



数学的にはこれら特異点のメタモルフォーゼも面白いかも知れない。しかし物理的に重要なのは、例えばクエンチされた合金の秩序化に於ては、2相の界面すなわち $W(\phi)$ の極大を与える ϕ の等高線がある。図2は界面(太線)の配置に対する、 ϕ -等高線の鞍点の irrelevance を例示している。



ここに矢印は以後の界面の運動の方向を示している。本稿の主題は上図の2様の発展を分岐する特異点に相当するものはどんなものかという事である。それは、換言すると界面が左図のように I 相領域を漸近的に遠く引き離してもせず、その逆(右図)でもないという状況で、その微妙なバランスには界面付近にたくわえられる excess energy (界面張力) だけでなく界面と界面のあいだにはたらく有効的な相互作用 energy が counter part として重要である(特殊な場合には界面の定義自体が有効でない状況も生じる; §3)。従って、この分岐点に相当するものはエネルギー的に不安定で、 ϕ -等高線の鞍点との対比をいえ

ば、場中からポテンシャル $U(\phi)$ の functional の鞍点、より一般にはセパトトリックス (鞍点に漸近する解) である。これらのすべてを調べる事はできていない。唯一鞍点 (= 不安定停留点) について、特定のモデルの厳密解や特殊な配置の鞍点 $\phi(\vec{x})$ の近くの解析によって、僅かにわかってきた事を報告する⁽²⁾。

§2. 厳密に解ける例

(1)式で $W(\phi) = 1 - \cos \phi$ とおき、 $\phi = 0, 2\pi$ の2つの minima を用いると、鞍点解 (以下サドルと呼ぶ) の定常条件から、(適切な無限遠条件のもとで)

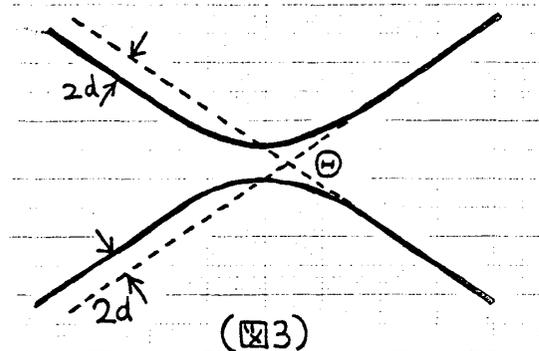
$$0 = -\frac{\delta U}{\delta \phi} \quad (2)$$

$$= \nabla^2 \phi - \sin \phi \quad \vec{\nabla} \equiv (\partial_x, \partial_y) \quad (3)$$

となり、左辺のゼロは $\nabla^2 \phi = 0$ と見做してもよいことから、2次元サインゴルドン系のソリトン解⁽²⁾を借用できる。結果は適当に並進・回転すると、

$$\phi(\vec{x}) = 4 \tan^{-1} \left[\frac{e^{\vec{n} \cdot \vec{x}} + e^{\vec{m} \cdot \vec{x}}}{1 + \tan^2(\Theta/2) e^{(\vec{n} + \vec{m}) \cdot \vec{x}}} \right]; \quad |\vec{n}| = |\vec{m}| = 1, \quad \vec{n} \cdot \vec{m} = \cos \Theta \quad (4)$$

ここに可変パラメータ Θ は遠方の界面のなす角度を表わし (図3参照)、一方平行な漸近線の間隔 ($\equiv 2d$) は、 Θ と $d = -\ln[\tan^2(\Theta/2)]$ なる関係にある。サドルは (並進・回転を含めて) 4つのパラメータをもつサドル族をなし、その各々は、同じ遠方境界条件下の界面の挙動 (図2) の分岐点となるのである。



§3. あるサドルの数値的安定性解析

サドルの不安定性を担う不安定モードの数及びその形状等を知る為、下のモデルの $\Theta = \pi/2$ のサドルに就いて、線形安定性解析を行なった。

$$W(\phi) = \frac{1}{4} (1 - \phi^2)^2 \quad (5)$$

このモデルについては、 $\Theta \neq \pi/2$ でのサドル解が数値的にも得られない。しかし、4パラメータ族をもつ事は、線形安定性解析の結果として示唆される。 $\Theta = \pi/2$ を選んだ他の理由は、対称性によって計算機のメモリーを節約できる事である。具体的手続きは、(1), (2),

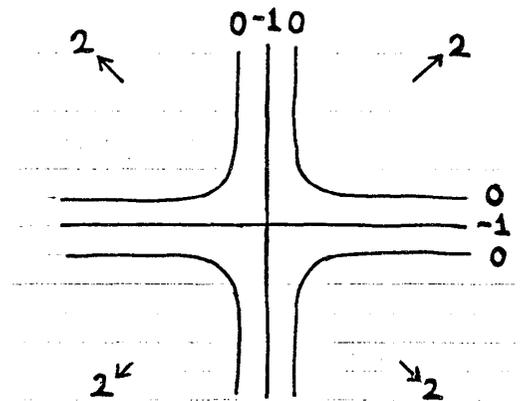
(5)より導かれるサドル $\phi_s(\vec{x})$ の満たすべき方程式

$$0 = \nabla^2 \phi_s - \phi_s + \phi_s^3 \quad (6)$$

を境界条件 $\phi_s(x, y) \rightarrow \tanh(x/\sqrt{2}) \tanh(y/\sqrt{2})$ as $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ のもとで、対称性を利用して数値的に求め、次に ϕ_s からの1次の変化 $\varepsilon\psi(\vec{x}, t) \equiv \phi(\vec{x}, t) - \phi_s(\vec{x})$ について(1), (5)を線形化した方程式

$$-\partial_t \psi = \mathcal{H} \psi \quad ; \quad \mathcal{H} = -\nabla^2 + 3\phi_s^2(\vec{x}) - 1 \quad (7)$$

を数値的に解く。(7)は 'Hamiltonian' \mathcal{H} の Schrödinger 方程式に類似で、前半の式より負[正]の固有値の固有状態が不安定[安定]な線形モードに対応することがわかる。 $\phi_s(\vec{x})$ は、定性的には $\tanh(x/\sqrt{2}) \tanh(y/\sqrt{2})$ と同様の ϕ -等高線をもち、その結果 \mathcal{H} の中の1粒子ポテンシャル部分は図4の様になる。 \mathcal{H} の対称性(群論の通称 C_{4v})を用いて、固有函数を既約表現によつて分類し、個々について reduce された空間で \mathcal{H} の数値的対角化を行った。有限系 ($|x|, |y| \leq L \approx 30$, かつ周期的及び反周期的境界条件)の計算から $L \rightarrow \infty$ を外挿して、以下の結論を得た。



(図4: $3\phi_s^2(\vec{x}) - 1$ の等高線)

1) 不安定モードは唯一つである。: 固有函数は局在し節線をもたない。 $\phi = \phi_s \pm \varepsilon\psi$ は図2の変形に夫々対応する。

2) 中立モード(固有値=0)は4つある。: うち2つは、2次元既約表現 E (固有函数の群 C_{4v} 下の変換性が $\{x, y\}$ の最低固有値に属する, x & y 方向の並進不変性を反映するモード, $\partial_x \phi_s$ & $\partial_y \phi_s$)。又1つは既約表現 B_1 (同上 $\{x^2 - y^2\}$) の最低固有値に属し2次元面内の回転不変性を反映するモード $\hat{L}_z \phi_s \propto (x\partial_y - y\partial_x)\phi_s$ 。第4の中立モードは不安定モードと同じ既約表現 A_1 (同上 $\{1\}$) に属し、その固有函数は、 $W(\phi) = 1 - \cos\phi$ の場合の図3で ϕ を $\pi/2 \rightarrow \pi/2 + \delta\phi$ と変えた際の $\delta\phi$ と定性的に同様である。既ち、遠方では界面の漸近線を回転させ、近くでは図3の様に界面(今は $\phi=0$ の線)を引き離す。

最後の結果は、(5)のモデルにおいてサドルに (並進・回転の他に) 第4のパラメータ ϕ があって対応する中立モードを(6)式のパラメータ微分から generate する事を示唆する。但しこれは ϕ に関してポテンシャル $U(\phi)$ が不変である事を意味しない(蔵本由紀氏の御指摘による)。他方、上の結果はサドル族が5個以上のパラメータを持つ — 例えは図3の ϕ と d が独立 などの — 可能性を否定する。もしあれば第5, ... の中立モードが見出され

た著だから。

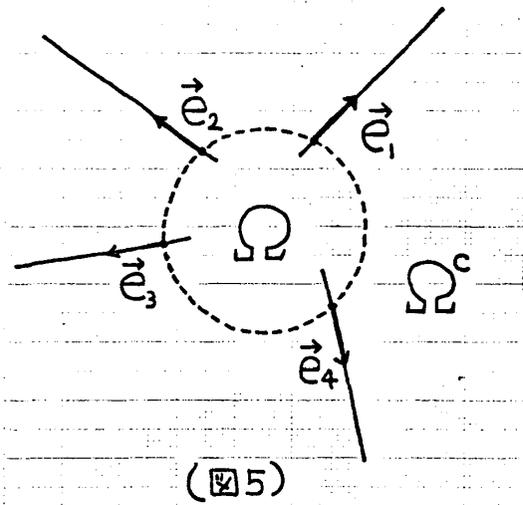
§4. 遠方 ($|\alpha| \gg 1$) での考察

今扱っているサドルは、遠方で4つの半無限界面に分解される。定常条件 $\omega_c \phi = 0$ (2式) から、それらは4直線に漸近する。各界面は向きと平行移動の2パラメータで指定される。それ故、無限遠方の境界条件には8つのパラメータがあり、全体の並進・回転不変性を別にして実質5自由度の可能性がある。そこで、遠方での定常条件からこれら自由度にどれだけの制約が課せられるかを見てみる。今、サドルが実現していると仮定し、 $\omega_c \phi$ の鞍点を包む十分大きな領域とその外部に平面を分ける(図5)。外側 Ω^c では界面は漸近直線に十分近い。サドル解は ϕ vs Ω の停留点であるから、 Ω の内部を rigid に並進・回転しても、 Ω の1次の変化はない。この事から、恰も外側 Ω^c での界面を弦に見たときの張力及びトルクの釣り合い方程式が得られる。

$$\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4 = \vec{0} \quad (8)$$

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 0$$

ここで $|\vec{e}_k| = 1$ 。又、 d_k は漸近直線と原点との符号つき距離。上の3つの制約条件から、境界条件の自由度は実質2つに減らされる。それらは結局図3の θ 及び d であることが確かめられる。この2つの量を関係づける条件 ($W(\phi) = 1 - \cos \phi$ の例では $d = -\ln[\tan^2(\theta/2)]$) は、従って Ω 内部の定常条件に起因している。(8)は定常解の安定・不安定に無関係に得られた事に注意したい。



(図5)

§5. 議論

前節までに見たように、サドル族は4パラメータをもつとはいえ、8自由度の境界条件のうちの特例の場合にのみ存在する。それ以外の場合にも図2のような2つの漸近挙動が異なるアトラクターとして存在するだろうか。もし存在するならばそれらの basin 境界にセパトリックスがあるだろうか。一方、行きつく先(サドル)のない場合のセパトリックスは考える事ができるのか、特に条件(8)も全く満たされない場合など今のところ何もわかっていない。

文献: 1) Ken Sekimoto (preprint); 2) R. Hirota; J. Phys. Soc. Japan, 35, 1566 (1973), 又 K. K. Kobayashi and M. Izutsu; J. Phys. Soc. Japan, 41, 1091 (1976).