

Oscillator Lattice の協力現象

基研*, 京大理

篠本滋*, 坂口英継, 蔵本由紀

自然振動数にばらつきのあるリミットサイクル振動子の集団が、振動子間の相互作用によってひきあこす引きこみ現象を研究する。生体組織にみられるリミットサイクル系には、心臓のように協力的な同期を要求される系や、腸のぜんも運動のように全体的な同期がおこるべきではない系のあることが知られている。これらの協力性のちがいは、その構成要素である振動子間の相互作用の形態のちがいを反映していると考えられる。

相互作用の形態には様々な要素が考えられる、例えば素子間の相互作用の形や強さに加えて到達距離、また到達距離が有限である場合には振動子を配置している空間の次元などである。本研究では単純化したモデルを用いて特にその協力現象と空間次元との関係を探っていく。

2. モデル

安定なリミットサイクルをもつ振動子の運動は、位相を適切に定義することによって位相のみで閉じた方程式を得ることができる^{1,2)}。例えば単一の振動子の運動はその位相 ϕ の運動方程式として $d\phi/dt = \omega$ とあらわせる。この位相 ϕ が周期 2π で振動子の同じ状態を表現するならば ω はその振動子の振動数である。次に2つの振動子を考え、その振動子間に、位相をそろえようとする力が働いているとして

$$\begin{aligned} d\phi_1/dt &= \omega_1 - K \{ \sin(\phi_1 - \phi_2 + \alpha) - \sin\alpha \}, \\ d\phi_2/dt &= \omega_2 - K \{ \sin(\phi_2 - \phi_1 + \alpha) - \sin\alpha \}, \end{aligned} \quad |\alpha| < \frac{\pi}{2}, \quad \omega_i > 0 \quad (1)$$

のような場合を考えてみよう。相互作用 K を大きくするに従って各振動子の平均振動数 $\bar{\omega}_i = \lim_{t \rightarrow \infty} (\phi_i(t) - \phi_i(0))/t$ は互いに近づいてゆき、ついにある値 $(|\alpha(\omega_1 - \omega_2)| / \cos\alpha)$ 以上の K では2つの振動数は一致してしまう。(1)式で α は相互作用の反対称性からのずれをあらわす。 $\alpha=0$ の場合は2つの平均振動数の(相加)平均は保存し、元の振動数の平均に等しいのに対し、例えば $\alpha>0$ の場合、 $\bar{\omega}_i$ の平均は ω_i の平均より大きくなる。後者は生体組織のリミットサイクル振動子にみられる現象である。

我々の興味は多数の振動子の集団にあらわれる協力現象にあり、充分大きな体系をとることで何らかの普遍性がみられると考える。本研究では以下のようなモデルを考える。振動子を d 次元格子上に配置し、 i 番目の振動子はその置かれている点の最隣接格子点 (j) 上の振動子と(1)のような相互作用をする、則ち

$$d\phi_i/dt = \omega_i - K \sum_{(j)} \{ \sin(\phi_i - \phi_j + \alpha) - \sin\alpha \} \quad (2)$$

ここで ω_i は $\langle \omega_i \rangle = 0$, $\langle \omega_i \omega_j \rangle = \delta_{ij}$ を満たすガウス分布を仮定する ($\langle \rangle$ はサンプル平均である)。振動子の総数は $L^d = N$ 個とし、最終的には $N \rightarrow \infty$ の極限について議論する。

b. 解析とシミュレーション

このモデルで $\alpha=0$ とおいた場合, 相互作用は $\sin(\phi_i - \phi_j)$ という反対称なものとなっている。ここではまずこの場合の平均場, $d=1, 2, 3$, の数値シミュレーションの結果と, 解析的に扱える場合の結果を示し, 次に $\alpha \neq 0$ の場合の平均場, $d=1$, の結果を報告する。

(i) $\alpha=0$, 平均場の系

ここで平均場とは無限 range の相互作用を意味し, (2)式で すべての振動子について j の和をとり, $K \rightarrow K/N$ とおく。この系の性質は 蔵本が 1975 年に論じており²⁾, 相転移を示すことが明らかにされている。その秩序変数として我々は二つの量を導入する,

$$\begin{aligned} r &= N_S / N, \\ \sigma &= N^{-1} \sum_j \exp(i\phi_j) \end{aligned} \quad (3)$$

ここで N_S は同一の振動数に同期した振動子の数であり, r はいわば振動数選別³⁾の秩序をあらわす。第二の量は位相のそろい方をあらわす量で スピン系の秩序変数に類似している。この平均場の系は その特殊な相互作用の故に解析的な扱いが可能であり, σ を決定するセルフコンシステント方程式が存在する。振動数分布が α で仮定されたような単純なひと山の分布をとるとき この系は結合定数 K がある値 K_c を超えると 2 次相転移を示し, σ と r が同時に出現する (図 1)。ここで言う相転移とは α でみた 2 つの振動子の引きこみに由来しているものの, そこでみられた力学的な相転移とは意味がちがう。何故なら $K < K_c$ ではこの系の振動子は各々元々与えられた振動数で回転しており, $K > K_c$ ではじめて 協力的振動を生じたのである (図 2)。

(ii) $\alpha=0$, 有限次元系

有限 range の相互作用をする有限次元系では (i) でみられたような単純には期待できない。ここではまず 体系のシミュレーションの結果の一部を紹介し, 次に, ある極限についての近似的な解析を示す。有限次元系の場合, (3) 以外の秩序変数によって表現される相転移の存在の可能性は否めないが, 現在は上記秩序変数の出現のみに着目することにしよう。

この系は隣接相互作用のため, となり同志が振動数をそろえてゆこうとする。結合定数を大きくすると共に, 振動数の同期したクラスターが広がり, てゆくであろう。図 3 に $d=1$ の場合の振動数分布を示した。 ω_i の分布にあらわれる台地が同期クラスターである。1 次元系では サイズが無限である限り, すべての振動子が同期することはあり得ないことは容易に示せる。図 4 には $d=2$ の同期クラスターのパターンを示した。比較的大きなクラスターが 一列のボンドを境にして共存している点が特徴的である。図 5 には $d=3$ の同期クラスターの断面図を示している。2 次元系と対照的な点は ひとつの巨大なクラスター以外には小さなクラスターしか存在していないといえる傾向がみられる点である。

これら, 図 4, 5 をみると, 同期クラスターは 全系にひろがっているが, $N \rightarrow \infty$ の極限ではどうであろうか? まず結合定数 K が充分大きく, すべての位相が固定されたとして

$$d\phi_i/dt = \omega_i - K \sum_{j \in \text{nn}} \sin(\phi_i - \phi_j) \approx \omega_i - K \sum_{j \in \text{nn}} (\phi_i - \phi_j) = 0 \quad (4)$$

を解くことを考えよう。体系が $L^d = N$ の格子であるとすると, l だけ離れた点との位相の差の二乗平均は

$$\langle (\Phi_k - \Phi_0)^2 \rangle \sim \begin{cases} L & , d=1 \\ \ln L & , d=2 \\ l & , d=3 \end{cases} \quad (5)$$

となり、2次元以下では $N(L) \rightarrow \infty$ ではすべての振動子を同期させることができないことが予想される。位相の秩序 σ の出現の爲には $\langle \Phi^2 \rangle$ が有限になる必要があるが、これは4次元以下で発散する。図6に シミュレーションにより得られた σ と σ のサイズ依存性をまとめた。d=3 の σ のみが $N \rightarrow \infty$ で残る傾向を示しており上の議論とコンシステントである。

(iii) $\alpha \neq 0$, 平均場の系

相互作用の反対称性からのずれは 振動数の平均という量をも保存しない。2つの振動子について α で示した性質は、無限系の協力現象の中に如何に反映されるであろうか？ その一端は もはや平均場の系に於てみることをできる。この平均場の系では(i)と同様に σ のセルフコンシステント方程式が立てられる。その結果、 $\alpha=0$ の系と同様に σ と σ の同時出現する二次転移が存在することがわかった。 $\alpha=0$ の系との特徴的な差異は、相転移をおこした後の ω_k の分布にあらわれる。図7に $k > k_c$ の分布の一例を示すが 元々対称なガウス分布を与えても、相転移ののち、その形の対称性は破れる。図7の場合、 $\alpha > 0$ にと、たまため 元の分布よりも高振動数側にたよった形となっている。

(iv) $\alpha \neq 0$, 1次元系

空間的な相互作用を考えたとき、この系はさらに新しい側面をみせる。図8を図3と比較してみよう。2つの振動子や平均場の系でみられたように、やはり $\alpha > 0$ とと、た故の高振動数側へのずれがみられる。さらに重大なことは、同期クラスターのサイズに特徴的な単一のスケールが存在しないようにみえることである。また、クラスター数については $\alpha=0$ の場合、ほぼ k^{-2} に比例して減少したのに対して より急激な減少の傾向を示すこともわかった。

C. まとめ

振動数にばらつきのある リミットサイクル振動子系の示す協力現象の、次元、結合力の形への依存性を シミュレーション、解析を通して調べた。

(1) $\alpha=0$ の結合の場合、振動数凝縮の秩序 σ の出現は $d > 2$ 、位相の秩序 σ の出現は $d > 4$ で期待できることがわかった。線形解析にはしかし、部分的な同期クラスターのパーコレーションによって 有限の σ が出現し得るという可能性をとり入れていない。そのため $d=2$ での σ の部分的な出現の可能性は否定されたわけではない。

(2) $\alpha \neq 0$ の場合の平均場、 $d=1$ の系の性質を調べた。 α の存在は 系の中のある種の対称性を破ると共に解析を困難にする。 $d=1$ の場合に 同期クラスターに単一のスケールがみられない点が新しい側面と考えられる。 $d=2,3$ について現在しらべているが さらに新しい側面がみられつつある。このことは別の機会に報告したい。

本研究ではこの非平衡の体系にみられる相転移を中心に議論した。この体系の特徴は

系自体が一種のカオティックな状態になっており、ノイズを自ら作成しつつそのなかでさらに秩序を作りあげる点であろう。この報告でみられた、いわば定常的な量以外に、ダイナミカルな側面、例えば波動現象や応答など、を研究することも有意義だと考える。

図1. 秩序変数のK依存性

図2. $\tilde{\omega}_i$ の分布 ; (a) : $K < K_c$, (b) : $K > K_c$

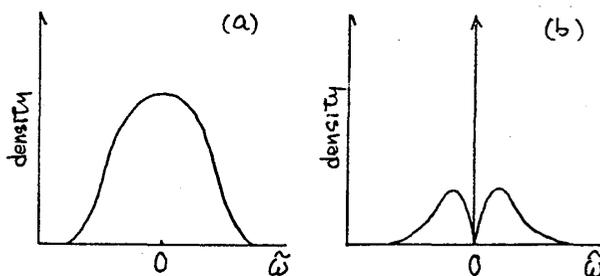
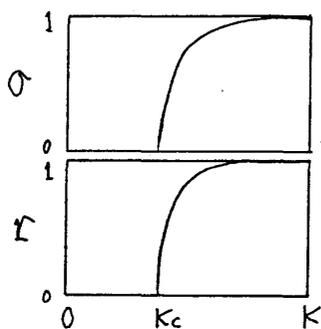


図3. $d=0, d=1$ の振動数分布

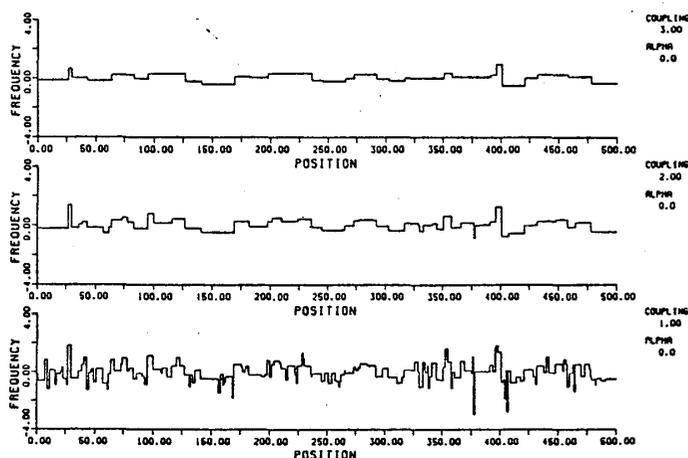


図4. $d=0, d=2$ の同一振動数マスター (隣りあう格子点間の振動数の差異がないとみなされる場合に格子点間にボンドを描いた)

COUPLING 1.10

COUPLING 1.20

COUPLING 1.30

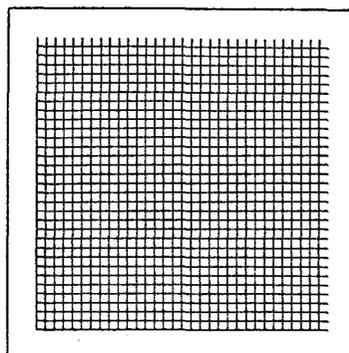
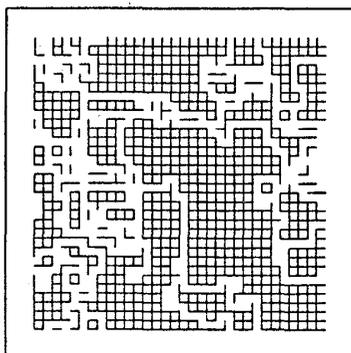
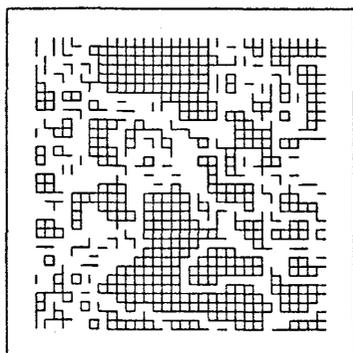


図5. $\alpha=0, d=3$ の同期クラスターの断面図

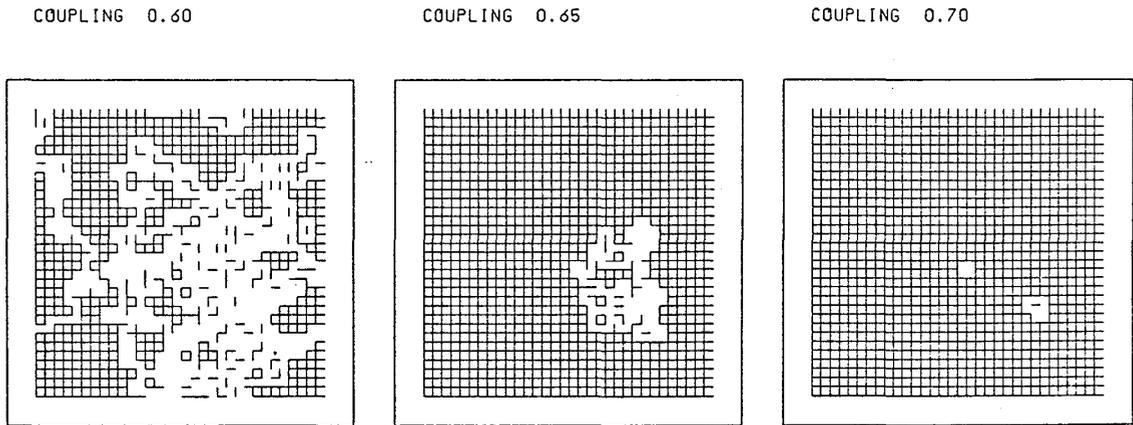


図6. $\alpha=0, d=2,3$ の秩序変数のサイズ依存性

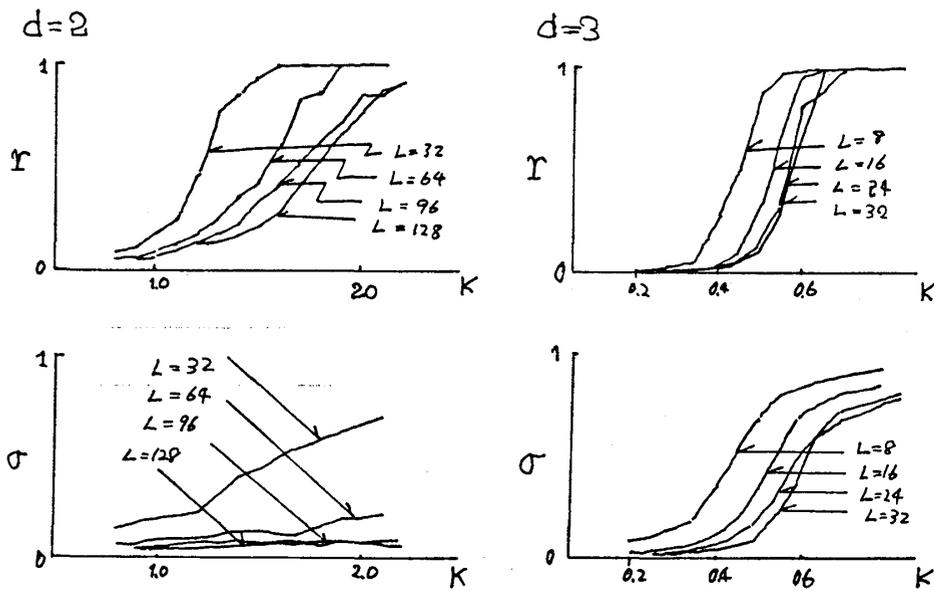


図7. 平均場の系

$K > K_c$ での振動数分布

(a) $\alpha=0^\circ$

(b) $\alpha=45^\circ$

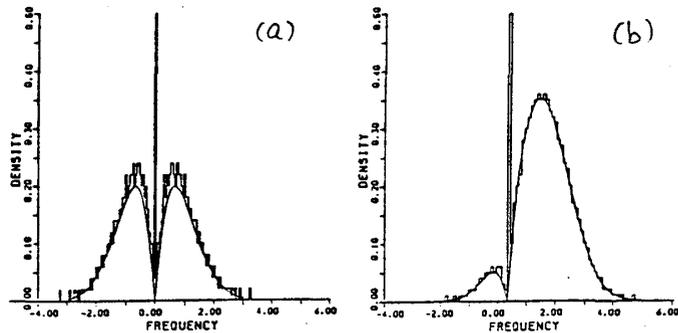
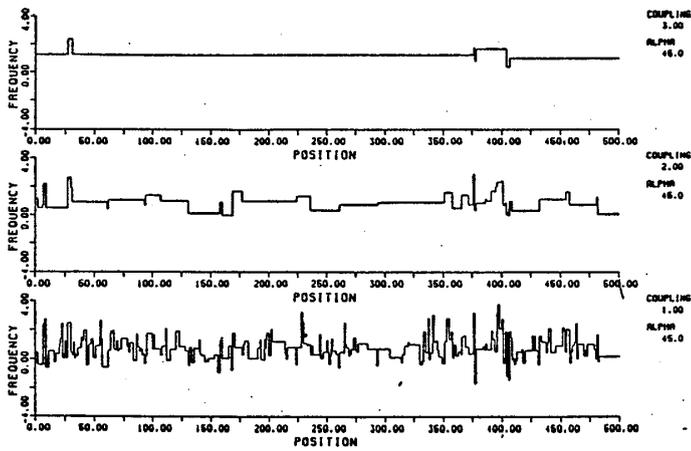


図8. $\alpha \neq 0, d=1$ の場合の振動数分布 ($\alpha=45^\circ > 0$ を選んだ)



参考文献

- 1) A.T. Winfree, *The Geometry of Biological Time*, Biomath. vol.8 (Springer-Verlag, N-Y, 1980)
- 2) Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence* (Springer, Heidelberg, N-Y, Tokyo 1984)