文 献

1) 岡 小 天, 物理科学選書 7「バイオレオロジー」, 裳華房 (1984)

2) D. A. Mc Donald, *Blood flow in arteries* (2nd ed.), Edward Arnord, London (1974)

3) 菅原基晃, 桜井靖久, 井街 宏, 藤正 巌, 医用電子と生体工学 11 (1973) 180

4) 坂西明郎, 長谷川正光, 物性研究 42 (1984)

5) K. Muroya and S. Watanabe, J. Phys. Soc. Jpn., **50** (1981) 3159.

太い動脈中の脈波のソリトン理論

椙山女学園大学 右衛門佐 重雄

動脈中の流れと圧力の波の形については多くの測定がなされてきた。[1,2] 圧力脈波には伝播に伴う波面の突っ立ち (steepening) と山の高なり (peaking) がみられる。脈波の伝播については運動方程式における非線形対流項を省略した多くの線形理論[3-6]が提出された。 然し, 非線形項を省略しうる条件は十分にととのっているとはいえない。血流速度が零から最大値 $(v_z)_m$ まで達するまでの時間を τ, 脈波の速度を V とすると, 犬の大動脈の場合 $(v_z)_m \simeq 1$ m/s, $V \simeq 5$ m/s として, 非線形項 $v_z \partial v_z / \partial t \sim (v_z)_m^2 / V\tau$ と流速の時間変化の項 $\partial v_z / \partial t \sim (v_z)_m / \tau$ との比は 0.2 程度となるからである。一方, 大動脈においては粘性の影響は小さい。粘性項 $(\eta/\rho)(1/r)\partial v_z/\partial r \sim (\eta/\rho)(v_z)_m/R_0^2$ からの寄与は, $\eta = 0.04\ P$, $\rho = 1.05\,\mathrm{g/cm^3}$, $R_0 = 0.3\,\mathrm{cm}$ として, 非線形項の 1/10 程度である。これまで非線形対流項の効果を考慮した多くの理論が提出されている。[7-11] 断面積および弾性率が一定の管の中の流れについて,[7] 或いは管の弾性率の軸に沿っての変化も考慮して,[8] さらには, 動脈の枝分かれによる分流を洩れと考えて連続の式の中に洩れの項を入れたり, 管の圧力と断面積の関係を脈波の伝播速度の実測値から求めるようにしたりしている。[9] これらの非線形理論では解を得るのに特性曲線法に従い, 繰り返し計算をコンピューターによって行っている。菅原ら[11]はできるだけ解析的な方法によって見通しのよい結果をうるために, 圧力と断面積との間には管壁の弾性法則に従う関係が成り立つとして, 特性曲線法にもとづく定式化を行い伝播速度や突っ立ち現象など脈波の振舞いをより解析的に説明している。これらの非線形理論においては, 圧力と断面積の関係が管壁の運動方程式と関連して与えられていない。また, 理論の結果として, 脈波を支配する方程式が圧力或は流速に関する一つの非線形波動方程式の形では表現されていない。一方坂西ら[12]は動脈壁

の非線形弾性に由来する脈波のソリトンモデルを提起した。然し彼等の理論では血液の運動方程式における非線形対流項や連続の式における非線形項や管壁の運動方程式における慣性項が無視されていた。

本論文では脈波の非線形理論に本質的とみられる非線形項や慣性項をとり入れ，太い動脈ににおける脈波をソリトン理論によって記述することを試みる。その第一歩として，粘性の効果を無視し，大動脈中の血流を特徴づける理想化した体系として，長いまっすぐな円形の断面をもった一様な薄い厚さの弾性的な壁をもった管の中に完全流体が満たされている系を考え，流速や圧力の場を支配する波動方程式を求める。回転対称を推定して，円とう座標系をとり，断面に関して軸方向の速度と流体の圧力の分布が一様であるとして，軸方向の流速 $v_z(z,t)$，流体圧 $P(z,t)$ および管壁の半径方向の変位 $u_r(z,t)$ について一次元的な場を考える。 軸方向の流体の流れに関する Navier-Stokes 方程式並びに非圧縮性流体の連続の式はそれぞれ

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} \quad , \tag{1}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial (v_z S)}{\partial z} = 0 \tag{2}$$

で与えられる。ここで，$S(z,t)$ は管の断面積である。管壁の運動を考える場合に血管が埋めこまれている組織が血管の運動に及ぼす影響を取り入れるため，効果的な慣性厚さ $H = h + h'$ を考える。ここで h は弾性的な変形に参加している壁の厚さ，h' は壁の運動に付随する組織の効果的な付加質量の厚さを表わしている。管の半径方向の運動は次式で与えられる。

$$\rho_0 H \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} = (P - P_e) - \frac{h}{R}\sigma_t \quad , \tag{3}$$

ここで，ρ_0 は壁や組織の密度で一定とする。 $R(z,t)$ は管の半径，σ_t は壁の中の半径に垂直方向の応力，P_e は管の外側の圧力でほゞ大気圧に等しいとみられる。 壁が静止している場合で，$P - P_e = 0$ のときの管の半径を R_0，$R = R_0 + u_r$ として壁の弾性的性質を次式で与える。

$$\sigma_t = E\frac{u_r}{R_0}\left(1 + a\frac{u_r}{R_0}\right) \tag{4}$$

ここで， a は非線形弾性の係数である。壁の質量保存の条件は次式で与えられる。

$$RH = R_0 H_0 \,, \quad Rh = R_0 h_0 \quad , \tag{5}$$

ここで，H_0 と h_0 は平衡 $(R = R_0)$ のときの効果的な慣性厚さおよび壁の厚さである。(4),(5) を (3) に入れ， $R = R_0 + u_r$， $S = \pi (R + u_r)^2$ を考慮すると (1),(2),(3) 式は v_z， P， u_r

に関する連立方程式となる。(3)と関連して長さと時間の特性的な量を次のようにとり，

$$L_0=(R_0 H_0\,\rho_0\,/\,2\rho)^{1/2}\ ,\qquad T_0=(\,\rho_0 H_0\,R_0^2/\,h_0\,E\,)^{1/2}\ , \tag{6}$$

無次元の独立変数 z', t' 並びに従属変数を次のように導入する。

$$z=L_0\,z'\ ,\qquad t=T_0\,t'\ , \tag{7}$$

$$v_z=c_0\tilde{v},\quad P-P_{\mathrm{e}}=p_0\tilde{p}\ ,\quad u_r=R_0\tilde{\gamma}\ , \tag{8}$$

ここで，c_0，p_0 は次式で定義されている。

$$c_0=\frac{L_0}{T_0}=\left(\frac{h_0\,E}{2\,\rho R_0}\right)^{1/2},\qquad p_0=\frac{Eh_0}{2R_0}\quad . \tag{9}$$

変換(7),(8)によって，3つの基礎方程式はそれぞれ次の無次元方程式になる。

$$\frac{\partial\tilde{v}}{\partial t'}+\tilde{v}\,\frac{\partial\tilde{v}}{\partial z'}=-\frac{\partial\tilde{p}}{\partial z'}\quad , \tag{10 a}$$

$$\frac{\partial\tilde{\gamma}}{\partial t'}+\tilde{v}\,\frac{\partial\tilde{\gamma}}{\partial z'}+\frac{1}{2}\,(\,1+\tilde{\gamma}\,)\,\frac{\partial\tilde{v}}{\partial z'}=0\ \ , \tag{10 b}$$

$$\frac{\partial^2\tilde{\gamma}}{\partial t'^2}=\frac{1}{2}\,\tilde{p}\,(\,1+\tilde{\gamma}\,)-\frac{\tilde{\gamma}\,(\,1+\,a\,\tilde{\gamma}\,)}{(\,1+\,\tilde{\gamma})}=0\quad . \tag{10 c}$$

拡張期(diastole)の末期においては流速 v_z が零となり，血管壁の加速度も零となる。そのときの動脈圧を P_0 で表わし，(8)で $P_0-P_{\mathrm{e}}=p_0\,\tilde{p}_0$ とかき，壁の半径方向の変位を $(u_r)_0=R_0\,\tilde{\gamma}_0$ とおくと，$\tilde{P}_0$, $\tilde{\gamma}_0$ は(10 c)によって次式で関係づけられる。

$$\tilde{p}_0=\frac{2\tilde{\gamma}_0\,(\,1+\,a\tilde{\gamma}_0\,)}{(\,1+\tilde{\gamma}_0\,)^2} \tag{11}$$

非線形波動の漸近的な性質を研究するためスケール変換[13]が導入され，従属変数の摂動展開の方法と結合されていわゆる reductive perturbation method [14-16] 或は long-wave approximation[15, 17] の方法が公式化されている。この方法に従ってまづ(10)式を線形化する。

$$\frac{\partial\tilde{v}}{\partial t'}+\frac{\partial\approx{p}}{\partial z'}=0\quad , \tag{12 a}$$

$$\frac{\partial\approx{\gamma}}{\partial t'}+\frac{1}{2}\,(\,1+\,\tilde{\gamma}_0\,)\,\frac{\partial\,\tilde{v}}{\partial z'}=0\quad , \tag{12 b}$$

$$\frac{\partial^2\,\approx{\gamma}}{\partial t'^2}=\frac{1}{2}\,(\,1+\,\tilde{\gamma}_0\,)\approx{p}_0-\frac{\{\,1+(\,2a-1\,)\,\tilde{\gamma}_0\,\}}{(\,1+\,\tilde{\gamma}_0\,)^2}\,\approx{\gamma}\quad , \tag{12 c}$$

ここで，$\tilde{\tilde{p}}$, $\tilde{\tilde{\gamma}}$ は次式で定義されている。

$$\tilde{p} = \tilde{p}_0 + \tilde{\tilde{p}}, \quad \tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_0 + \tilde{\tilde{\gamma}} \quad . \tag{13}$$

これらの方程式に対して調和解

$$\tilde{v}, \tilde{\tilde{p}}, \tilde{\tilde{\gamma}} \quad \propto \quad \exp\{ i(kz' - \omega t') \} \tag{14}$$

を推定すると，われわれの非線形問題に対して次の線形分散関係が得られる。

$$\omega = gk (1 + k^2)^{-1/2} \ , \quad g = \frac{\{1 + (2a - 1)\tilde{\gamma}_0\}^{1/2}}{(1 + \tilde{\gamma}_0)} \quad . \tag{15}$$

小さい k に対して ω を展開して３次までとり，(14) の指数因子に入れると次の形になる。

$$\exp \left[i \left\{ k(z' - gt') + \frac{1}{2} k^3 gt' \right\} \right] \quad . \tag{16}$$

漸近的な性質の相似性は $(z' - gt')/(gt')^{1/3} = \mathrm{const}$. を不変に保つ座標変換に対して保たれる。そこで次のスケール変換を行い，

$$\xi = \varepsilon^{1/2}(z' - gt'), \quad \tau = \varepsilon^{3/2} gt' \tag{17}$$

これに加えて，$\tilde{v}$, $\tilde{\tilde{p}}$, $\tilde{\tilde{\gamma}}$ の ε に関する摂動展開を導入する。

$$\tilde{v} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n v_n(\xi, \tau) \quad , \tag{18 a}$$

$$\tilde{\tilde{p}} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n p_n(\xi, \tau) \quad , \tag{18 b}$$

$$\tilde{\tilde{\gamma}} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \gamma_n(\xi, \tau) \quad . \tag{18 c}$$

従属変数 $\tilde{v}$, $\tilde{\tilde{p}}$, $\tilde{\tilde{\gamma}}$ は ξ と τ だけの関数と推定されているので非線形方程式 (10) は ξ と τ の微分演算子の項で書かれる。これに (18) を代入して，ε の次数の等しい項を集めて次の方程式系をうる。ε^0 に比例する項は (11) 式を与え，ε に比例する項から

$$-g \frac{\partial v_1}{\partial \xi} + \frac{\partial p_1}{\partial \xi} = 0 \quad , \tag{19 a}$$

$$-g \frac{\partial \gamma_1}{\partial \xi} + \frac{1}{2}(1 + \tilde{\gamma}_0) \frac{\partial v_1}{\partial \xi} = 0 \quad , \tag{19 b}$$

$$-\frac{1}{2}\tilde{p}_0\ r_1-\frac{1}{2}(1+\tilde{r}_0)\ p_1+\frac{(1+2a\tilde{r}_0+a\tilde{r}_0{}^2)}{(1+\tilde{r}_0)^2}\ r_1=0\quad . \tag{19 c}$$

が得られ，ε^2に比例する項から

$$-g\frac{\partial v_2}{\partial \xi}+g\frac{\partial v_1}{\partial \tau}+v_1\frac{\partial v_1}{\partial \xi}+\frac{\partial p_2}{\partial \xi}=0\quad , \tag{20 a}$$

$$-g\frac{\partial r_2}{\partial \xi}+g\frac{\partial r_1}{\partial \tau}+v_1\frac{\partial r_1}{\partial \xi}+\frac{1}{2}(1+\tilde{r}_0)\frac{\partial v_2}{\partial \xi}+\frac{1}{2}r_1\frac{\partial v_1}{\partial \xi}=0\quad , \tag{20 b}$$

$$g^2\frac{\partial^2 r_1}{\partial \xi^2}-\frac{1}{2}\tilde{p}_0 r_2-\frac{1}{2}(1+\tilde{r}_0)\ p_2-\frac{1}{2}p_1 r_1$$
$$+\frac{(1+2a\tilde{r}_0+a\tilde{r}_0^2)}{(1+\tilde{r}_0)^2}\ r_2+\frac{(a-1)}{(1+\tilde{r}_0)^3}\ r_1^2=0\quad . \tag{20 c}$$

が得られる。(19 c) から $p_1=\{2g^2/(1+\tilde{r}_0)\}r_1$ が得られる。(19 a)(19 b) を積分して，$v_1=p_1/g+f(\tau)$，$v_1=\{2g/(1+\tilde{r}_0)\}\ r_1+\varphi(\tau)$ をうるが，$v_z=0$で $P=P_0$，$r=\tilde{r}_0$という条件，即ち $v_1=0$で$p_1=0$，$r_1=0$ という条件から $f(\tau)=0$，$\varphi(\tau)=0$となり，これら2つの式は再び(19 c)から得た関係を与える。結局 v_1，p_1，r_1 は次式で結ばれている。

$$v_1=\frac{p_1}{g}=\frac{2g}{(1+\tilde{r}_0)}\ r_1\quad . \tag{21}$$

(20)の3つの式を組み合せ，さらに(21)の関係を用いて，v_2，p_2，r_2を消去すると，KdV 方程式が次の形でえられる。

$$\frac{\partial v_1}{\partial \tau}+K\ v_1\frac{\partial v_1}{\partial \xi}+\frac{1}{2}\ \frac{\partial^3 v_1}{\partial \xi^3}=0\quad , \tag{22}$$

ここで，Kは次式で与えられる定数である。

$$K=\frac{(1+\tilde{r}_0)\ \{(1+2a)+3(2a-1)\ \tilde{r}_0\}}{4\{1+(2a-1)\ \tilde{r}_0\}^{3/2}}\quad . \tag{23}$$

(21)から p_1とr_1に関しても同じような KdV 方程式が得られる。

$$\frac{\partial p_1}{\partial \tau}+L\ p_1\frac{\partial p_1}{\partial \xi}+\frac{1}{2}\ \frac{\partial^3 p_1}{\partial \xi^3}=0\quad , \tag{23}$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial \tau}+M\ r_1\frac{\partial r_1}{\partial \xi}+\frac{1}{2}\ \frac{\partial^3 r_1}{\partial \xi^3}=0\quad , \tag{24}$$

ここで,

$$L=\frac{K}{g},\qquad M=\frac{2g}{(1+\tilde{\gamma}_0)}\;K. \tag{25}$$

これらの KdV方程式の単一ソリトン解と変換の式(18)(17)(13)(7)(8)を用いて,流速,圧力および壁の半径方向の変位についての単一ソリトン解がそれぞれ次の形で得られる。

$$v_z(z,t)=\frac{6}{K}\,c_0\,\tilde{\kappa}^2\,\mathrm{sech}^2\left[\frac{\tilde{\kappa}}{L_0}(z-Vt)-\delta\right]\;, \tag{26 a}$$

$$p(z,t)=P_0+\frac{6}{L}\,p_0\,\tilde{\kappa}^2\mathrm{sech}^2\left[\frac{\tilde{\kappa}}{L_0}(z-Vt)-\delta\right]\;, \tag{26 b}$$

$$u_r(z,t)=R_0\tilde{\gamma}_0+\frac{6}{M}R_0\tilde{\kappa}^2\,\mathrm{sech}^2\left[\frac{\tilde{\kappa}}{L_0}(z-Vt)-\delta\right]\;, \tag{26 c}$$

ここで,

$$V=g\,c_0\,(1+2\,\tilde{\kappa}_0^{\,2})\;. \tag{27}$$

大動脈流の場合,脈波が心臓からでてどれだけ時間がたてば突っ立ちをおこすかは KdV 方程式(22)の第3項を捨てた式から $t\simeq d_0/2K(v_z)_m$ と見積もられる。ここで d_0 は初期脈波の z 軸上での幅である。$K\simeq 1.0$, $(v_z)_m\sim 50\,\mathrm{cm/s}$, $d_0\sim 30\mathrm{cm}$ として, $t\sim 0.3$ s。従って,ソリトンが出来るまで波の進む距離は, $V\simeq 5$ m/s として, 1.5 m 程度とみられる。然るに実際は例えば abdominal aorta までの距離は 0.5 m 程度であるから,そこでは未だソリトン波は生成されていず生成途上にあるとみられる。このようにして脈波の突っ立ち現象はソリトン波生成の発展過程であるとして解釈することができる。(15)から得られる。微小攪乱波の速度 $g\,c_0\,(1+k^2)^{-1/2}$ や(27)のソリトンの位相速度 V は g によっているので $\tilde{\gamma}_0$ の関数である。従って最低血圧 P_0 によって変化することになる。われわれのモデルは粘性による効果を無視しているので,現実の動脈系における圧力低下や枝分れによる反射や末梢からの反射,抵抗等の効果は表現されていない。しかし,突っ立ち現象は反射波との干渉などによって説明するよりも非線形特有のソリトン波生成過程として自然に説明される。

参 考 文 献

1) D. A. McDonald, *Blood Flow in Arteries,* Edward Arnold, London (1960), 2nd Ed. (1974).

2) E. Wetterer and Th. Kenner, *Grundlagen der Dynamik des Arterienpulses,* Springer-Verlag, Berlin (1968).

3) M. H. Resal, J. Math. Pures Appl. Liouville, **2**, 342 (1976).
4) K. Witzig, Ph. D. Thesis, Univ. of Bern, (1914).
5) G. W. Morgan and J. P. Kiely, J. Acoust. Soc. Amer., **26**, 323 (1954).
6) J. R. Womersley, Phil. Mag., **46**, 199 (1955).
7) J. H. Olsen and A. H. Shapiro, J. Fluid Mech., **29**–3, 513 (1967).
8) A. C. L. Barnard, W. A. Hunt, et al., Biophys. J., **6**, 735 (1966).
9) M. Anliker, R. L. Rockwell and E. Ogden, ZAMP, **22**, 217 (1971), **22**, 563 (1971).
10) S. C. Ling and H. B. Atabek, J. Fluid Mech., **55**, 493 (1972).
11) 菅原基晃他，医用電子と生体工学　11巻，180（1973）.
12) 坂西明郎，長谷川正光，物性研究　42，437（1984）.
13) C. S. Gardner and G. K. Morikawa, Courant Inst. Math. Sci. Rep., NYO-9082, 1960, p. 1–30.
14) T. Taniuti and H. Washimi, Phys. Rev. Lett., **21**, 209 (1968).
15) T. Taniuti and C. C. Wei, J. Phys. Soc. Japan, **24**, 941 (1968).
16) T. Taniuti and N. Yajima, J. Math. Phys., **10**, 1369 (1969).
17) H. Washimi and T. Taniuti, Phys. Rev. Lett., **17**, 996 (1966).

セル・オートマトン系の統計的性質

京大・理　相沢洋二，西川郁子
東大・教養　金子邦彦

空間格子点 i 上で定義された離散的な変数 σ_i を考える。 時間発展が離散時間 n で一唯的な写像で決まる系を素朴なセル・オートマトン系と呼ぶ。

$$\sigma_i^{n+1} = F(\{\sigma_j^{n'}\}), \quad (n' \leq n, \quad i, j = 1, 2, \cdots, N)$$

中枢神経系の機能や形態形成のメタファー的モデルとして広い応用範囲を持っている。最近では，複雑な非線形場のパターン運動の基本的性質を調べる上からもセル・オートマトン系の統計現象に強い関心が向けられている。

偏微分方程式に従う非線形場の振舞いと本質的に異る側面に注目すると，次のような事柄が理論的にも重要であろうと考えられる。

1. C・A系では本質的に離散量を扱っているので，可微分構造に立脚したこれまでの理論に代