わしたものである。また $\alpha=1$ のとき

$$U=[-1/\{6(1-\exp(-t))\}]\ \{x^2-6(\exp t-1)^{2/3}\}$$

または，

$$U=[-1/\{6(1+\exp(-t))\}]\ \{x^2-6(\exp t+1)^{2/3}\}$$

を $U\equiv 0$ とつないだ型の解をもつ。幅は両者とも単調に増加する。振幅は前者では $t=\ln(3/2)$ で極小値をもち，後者では単調に増加する。この結果は２次関数型の有限なサポートをもつ初期値を与えても，その幅・振幅によりふるまいが異なることを陽に示し興味深い。

以上密度依存型の拡散をもつ非線形方程式の厳密解をいくつか示したが，非線形散逸系では神経波パルスの伝播や数種の生物の競合等，従属変数が複数であるシステムの解析が重要な問題である。また多次元の場合に興味深い現象がいくつか報告されている。これらの方程式に対して厳密な解の表示をうることができるかは今後の大きな課題である。

参 考 文 献

1) W. I. Newman: Some exact solutions to a nonlinear diffusion problem in population genetics and combustion, J. Theor. Biol. **85** pp. 325–334 (1980).

2) Y. Hosono: Travelling wave solutions for some density dependent diffusion equations, preprint.

細い棒状弾性体の動力学

東大・教養　鶴　秀生，和達三樹

1) Introduction

細い棒状弾性体は，大きな変形まで考慮すると，静的な場合でも非常に複雑な形をとる。これは連続体であるための条件から，つり合いの方程式が非線形微分方程式となるからである。ここでは静的な形状を決定する方程式，ならびに運動方程式とそれにともなうソリトン解についての説明を行う。

2) 弾性エネルギー

細い棒状弾性体の弾性エネルギーUは曲げU_bとねじりU_tの弾性エネルギーの和で表わすことができる。

$$U = U_b + U_t \tag{1}$$

$$U_b = \frac{A}{2}\int_0^L \kappa^2 \, ds \,, \quad U_t = \frac{C}{2}\int_0^L \omega^2 \, ds \tag{2}$$

ここでκは曲率，ωはねじれ率A, Cはそれぞれ曲げとねじりの弾性定数で棒の半径がa，ヤング率がE，剛性率がμのとき，

$$A = \frac{\pi a^4}{4} E \,, \quad C = \frac{\pi a^4}{4} \mu \tag{3}$$

で関係づけられる。(2)では線形の弾性体として取りあつかっていることを注意したい。伸びに対する変形はaが非常に小さいとき無視できるので以下棒の伸び縮みはないものとする。κ^2とω^2はオイラー角θ, φ, ψで

$$\kappa^2 = \theta'^2 + \sin^2\theta \ \varphi'^2 \tag{4}$$

$$\omega^2 = (\varphi' \cos\theta + \psi')^2 \tag{5}$$

と表わすことができる。ここでz軸が棒の中心軸に一致するようにオイラー角をとった。また$'$(ダッシュ)はsに関する微分を表わす。棒の両端の座標を与えた時の棒の形を決定する方程式は

$$\int_0^L \boldsymbol{t} \, ds = \int_0^L \begin{pmatrix} \sin\theta \sin\varphi \\ -\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} \tag{6}$$

という条件のもとでのUの条件付変分を，つまり

$$H = U + \int_0^L \boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{t} \, ds = \int_0^L \Big\{ \frac{A}{2}(\theta'^2 + \sin^2\theta \ \varphi'^2) + \frac{C}{2}(\varphi'\cos\theta + \psi')^2$$
$$+ \lambda_1 \sin\theta\sin\varphi - \lambda_2 \sin\theta\cos\varphi + \lambda_3 \cos\theta \Big\} ds \tag{7}$$

のθ, φ, ψに対する変分をとることによって得られる。よって次のような非線形微分方程式が得られる。

$$A(\sin\theta\cos\theta\,\varphi'^2-\theta'')-C(\psi'+\cos\theta\,\varphi')\sin\theta\,\varphi'$$
$$+\lambda_1\cos\theta\sin\varphi-\lambda_2\cos\theta\cos\varphi-\lambda_3\sin\theta=0 \tag{8}$$

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\{A\sin^2\theta\,\varphi'+C(\psi'+\cos\theta\,\varphi')\cos\theta\}$$
$$+\lambda_1\sin\theta\cos\varphi+\lambda_2\sin\theta\sin\varphi=0 \tag{9}$$

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}C(\psi'+\cos\theta\,\varphi')=0 \tag{10}$$

(10)からただちに

$$\psi'+\cos\theta\,\varphi'=\alpha \quad \cdots\cdots \quad \text{const} \tag{11}$$

がでる。それを(8)，(9)に代入し，適当な変数変換をすると

$$A(\theta''-\sin\theta\cos\theta\,\varphi'^2)+C\alpha\sin\theta\,\varphi'$$
$$-\lambda\cos\theta\cos\varphi+\mu\sin\theta=0 \tag{12}$$

$$A(\sin\theta\,\varphi''+2\cos\theta\,\varphi'\theta')-C\alpha\theta'+\lambda\sin\varphi=0 \tag{13}$$

となる。これが静的形状を決定する方程式を与える。

3） 運動方程式

次に運動方程式を出すために，運動エネルギーの表式を与えてみよう。運動エネルギーTは棒の中心軸の移動によるエネルギーT_{tr}と棒の中心軸の方向の回転によるエネルギーT_{r1}と棒の中心軸まわりの回転によるエネルギーT_{r2}の和によって表わされる。

$$T=T_{tr}+T_{r_1}+T_{r_2}$$
$$=\frac{\rho}{2}\int_0^L\dot{\boldsymbol{r}}^2\,\mathrm{d}s+\frac{k_1}{2}\int_0^L\dot{\boldsymbol{t}}^2\,\mathrm{d}s+\frac{k_2}{2}\int_0^L(\dot{\psi}+\cos\theta\,\dot{\varphi})^2\,\mathrm{d}s \tag{14}$$

となる。ここでρは棒の単位長さあたりの質量，k_1は棒の中心軸に垂直な軸まわりの慣性モーメント，k_2は棒の中心軸まわりの慣性モーメントである。ここで$\dot{}$（ドット）は時間についての微分を表わす。各々の量は材質の密度をρ_0，半径をaとおくと，

$$\rho = \pi a^2 \rho_0\,,\quad k_1 = \frac{\pi a^4 \rho_0}{4}\,,\quad k_2 = \frac{\pi a^4 \rho_0}{2} \tag{15}$$

で関係づけられる。ラグランジアン$\mathscr{L}$は

$$\mathscr{L} = T - U \tag{16}$$

となり　作用 I は

$$I = \int_0^t \mathscr{L}\ \mathrm{d}t \tag{17}$$

となる。$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{t}$ のあいだに

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{t} = \begin{pmatrix} \sin\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \tag{18}$$

という関係があるので，作用 I を（18）の拘束条件のもとで変分をとれば運動方程式が得られる。I_c を次のように定義し，

$$I_c = I + \int_0^t \int_0^L (\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{t}) \cdot \boldsymbol{\lambda}\ \mathrm{d}s\ \mathrm{d}t \tag{19}$$

その変分をとればよい。ここで $\boldsymbol{\lambda}$ はラグランジュの未定関数である。よって運動方程式はつぎのようになる。

$$\frac{\delta I_c}{\delta r_x} = \rho\,\ddot{r}_x - \lambda_x' = 0 \tag{20.a}$$

$$\frac{\delta I_c}{\delta r_y} = \rho\,\ddot{r}_y - \lambda_y' = 0 \tag{20.b}$$

$$\frac{\delta I_c}{\delta r_z} = \rho\,\ddot{r}_z - \lambda_z' = 0 \tag{20.c}$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta I_c}{\delta\theta} = {} & k_1(\sin\theta\cos\theta\ \dot{\varphi}^2 - \ddot{\theta}) \\ & - k_2(\dot{\psi} + \cos\theta\,\dot{\varphi})\ \sin\theta\,\dot{\varphi} \\ & - A(\sin\theta\cos\theta\,\varphi'^2 - \theta'') \\ & + C(\psi' + \cos\theta\,\varphi')\sin\theta\,\varphi' \\ & - \lambda_x\cos\theta\sin\varphi + \lambda_y\cos\theta\cos\varphi + \lambda_2\sin\theta = 0\end{aligned} \tag{20.d}$$

$$\frac{\delta I_c}{\delta\varphi}=\frac{-\partial}{\partial t}\{\ k_1\sin^2\theta\,\dot{\varphi}+k_2(\dot{\psi}+\cos\theta\,\dot{\varphi})\cos\theta\,\}$$

$$+\frac{\partial}{\partial s}\{A\sin^2\theta\,\varphi'+C(\psi'+\cos\theta\,\varphi')\cos\theta\}$$

$$-\lambda_x\sin\theta\,\cos\varphi-\lambda_y\sin\theta\sin\varphi=0 \tag{20.e}$$

$$\frac{\delta I_c}{\delta\psi}=\frac{-\partial}{\partial t}\,k_2(\dot{\psi}+\cos\theta\,\dot{\varphi})+\frac{\partial}{\partial s}C(\psi'+\cos\theta\,\varphi')=0 \tag{20.f}$$

ここで $\boldsymbol{r},\theta,\varphi,\psi,\lambda$ に時間依存性が無い場合は（20. d～ f ）の方程式は（8）～（10）の方程式になることを注意したい。

4） ソリトン解

ここで $\varphi=0,\quad \psi=0$ の場合を考える。すると方程式（20）は

$$\lambda'_x=0 \tag{21.a}$$

$$\rho\,\ddot{r}_y-\lambda'_y=0 \tag{21.b}$$

$$\rho\,\ddot{r}_z-\lambda'_z=0 \tag{21.c}$$

$$-k_1\ddot{\theta}+A\theta''+\lambda_y\cos\theta+\lambda_z\sin\theta=0 \tag{21.d}$$

$$-\lambda_x\sin\theta=0 \tag{21.e}$$

となる。（21.b）（21.c）を s について微分すると，（18）を使うことによって

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sin\theta+\frac{\partial^2}{\partial s^2}\lambda_y=0 \tag{22.a}$$

$$-\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\cos\theta+\frac{\partial^2}{\partial s^2}\lambda_z=0 \tag{22.b}$$

上の２つの方程式が得られる。 θ,λ が $U=s-vt$ の関数であるとすると（22.a）(22.b）から

$$\lambda_y=-\rho v^2\sin\theta+\alpha u+\beta \tag{23.a}$$

$$\lambda_z=-\rho v^2\cos\theta+\gamma u+\delta \tag{23.b}$$

が得られる。$U=\pm\infty$ で $\dot{\boldsymbol{r}}=0$ の条件を考えると， $\alpha=\gamma=0$ となる。（23）を（21.d）に代入し適当に変数変換すると

$$\frac{d^2}{du^2}\theta + \omega_0{}^2 \sin\theta = 0 \tag{24}$$

が得られる。ここで

$$\omega_0{}^2 = \frac{\sqrt{\beta^2+\delta^2}}{A-k_1 v^2}$$

である。(24)を $u=\pm\infty$ で $\theta=\pm\pi$, $\dfrac{d\theta}{du}=0$ の境界条件で解くと,

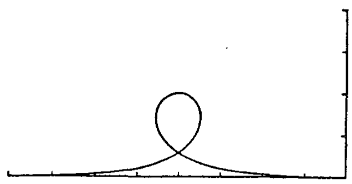
$$\sin\frac{\theta}{2} = \tanh\ \omega_0 u \tag{25}$$

が得られる。$s=\pm\infty$ で $\dot{\boldsymbol{r}}=0$ という条件を考えると

$$r_y = \frac{2}{\omega_0}\mathrm{sech}\ \omega_0 (s-vt)$$

$$r_z = -s + \frac{2}{\omega_0}\tanh\ \omega_0(s-vt) \tag{26}$$

が得られる。その形は図1に示してある。また



運動エネルギーは

$$\dot{\theta}^2 = 2\omega_0{}^2 v^2(\cos\theta+1)$$

$$= 4\omega_0{}^2 v^2 \mathrm{sech}^2 \omega_0 u$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}^2 = 4 v^2 \mathrm{sech}^2\ \omega_0 u$$

を使うと

$$T = \frac{\rho}{2}\int_{-\infty}^{\infty} 4v^2 \mathrm{sech}^2\ \omega_0 u\ du + \frac{k}{2}\int_{-\infty}^{\infty} 4\omega_0{}^2 \mathrm{sech}^2\ \omega_0 u\ du$$

$$= 4v^2\left(\frac{\rho}{\omega_0} + \omega_0 k\right) \tag{27}$$

となる。このように弾性体の大変形を考慮した方程式(20)からソリトン解が導びかれることを示した。

参 考 文 献

A. E. H. Love, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity.*