非線形拡散方程式のいくつかの厳密解

東大工　薩　摩　順　吉

ソリトン理論の成功は，これまで取扱いが困難とされていた広いクラスの非線形微差分方程式の解析に一つの可能性を与えた。また厳密な解の表示は方程式の記述する物理系の本質を理解するのに重要な役割を果してきた。エネルギーの散逸をともなう非線形拡散方程式では線形化の手法が適用できる少数の場合を除いて，初期値問題を厳密に扱える手法は見い出されていない。しかしこれまで発見されたいくつかの厳密解は対象とする系の解の一般的なふるまいを解析する上で一定の役割を果している（たとえば，数値計算のスキームの検証等）。以下では密度依存型拡散効果と増殖効果を含む

$$U_t = (U^2)_{xx} + f(U) \tag{1}$$

の型の方程式がどのような厳密解をもつかを議論する。

密度依存型の拡散は，多孔性媒質を通る流体，コロナにおける温度変化，生物集団における個体群圧効果などを表現するものとして知られている。このような拡散をもつ系では有限なサポートの解（ある領域で $U>0$, 他の領域で $U\equiv 0$）が存在する。その解は連続であるが一階微分が不連続となり，弱解と呼ばれている。Newman[1]は

$$U_t = \tfrac{1}{4}(U^2)_{xx} + U(1-U) \tag{2}$$

の進行波解として，$x<\tfrac{1}{2}t$ のとき $U=0$, $x\geqq \tfrac{1}{2}t$ のとき $U=1-\exp(x-t/2)$ が存在することを示した。これは (2) が $z=x-ct$ としたときに，

$$[U(U_z-U+2c)]_z + 2U(U_z-U+1)=0$$

と書換えられ，$c=\tfrac{1}{2}$ のときに可解となることを使ったものである。また $U=f(t)+g(t)(1-\cosh x)$ 型の解を仮定して時間的に増大する厳密解もえている。

細野[2]は $f(U)$ が $U(U-1)(\alpha-U)$ の型のときに (1) が速度によって形の異なる進行波解をもつことを数学的に明らかにした。それらの解の陽な表現を求めることを試みる。(1) が進行波解をもつとして，$z=x-ct$ を導入し，次の常微分方程式を考える。

$$(U^2)_{zz}+cU_z+U(U-1)\quad(\alpha-U)=0 \tag{3}$$

(3)の解で Laurent 級数展開可能なものを探そう。$U=\sum_{k=-m}^{\infty}a_k z^k$ と仮定すると，U^3 と $(U^2)_{zz}$ の項のつりあいから，このような解をもつためには $m=2$, $a_{-2}=20$ でなければならないことがわかる。z の各べきを調べて a_{-1}, a_0, … が決っていくが，z^4 の項から α が実数であるかぎり，$c=0$ が展開できるための条件になる。(3)の解は2次の極をもっているから，$c=0$ のときに指数関数型の解を仮定すれば，それは $U=[A_0+A_1\exp(kz)+A_2\exp(2kz)]/[1+\exp(kz)]^2$ と予想される。(3)に代入て $A_0\sim A_2$ を決めると，$\alpha=3/5$ のときに，$U=\tanh^2(z/2\sqrt{5})$ の解をもつことがわかる。$z\geqq 0$ のときに上の関数，$z<0$ のときに0としたものが 2) で存在の示された解の陽な表現になっている。同様の手法を使えば $(U^2)_{zz}+U^2(U-1)=0$ は，$U=(5/4)\,\mathrm{sech}^2(z/4)$ という解をもつことも示せる。この手法は他の方程式にも適用できる。以下に他の3例を示す。

(例1)　$U_t=\frac{1}{2}(U^2)_{xx}+8U(U-3/4)$　(4)

は $|x|<\pi/2$ で $U=\cos^2 x$, $|x|\geqq\pi/2$ で $U=0$ の平衡解をもつ。さらに $U=f(t)\cos^2 x$ と仮定すれば $f(t)$ が陽に求まり，$f(t=0)>1$ のときは $U\to\infty$ となり，$f(t=0)<1$ のときは $U\to 0$ となる厳密解がえられる。この結果は上記の平衡解が不安定な解であることを示唆している。

(例2)　$U_t=\frac{1}{2}(U^2)_{xx}-3U^2(U^2-1)$　(5)

は，$x-t>0$ で $U=\tanh(x-t)$, $x-t\leqq 0$ で $U=0$ の進行波解をもつ。方程式の対称性から逆向きに進む同型の解も存在する。また，

$$U_t=\frac{1}{2}(U^2)_{xx}+3U^2(U^2-2/3) \tag{6}$$

は $U=\mathrm{sech}\,x$ の解をもつが，例1と同様不安定な解である。

(例3)　$U_t=\frac{1}{2}(U^2)_{xx}+\alpha U$　(7)

は　$\alpha=-1$ のとき，

$$U=[-1/\{6(\exp t-1)\}]\ \{x^2-6(1-\exp(-t))^{2/3}\}$$

を $U\equiv 0$ とつないだ型の解をもつ。これは単調に幅が増加し，振幅が減衰していく過程をあら

わしたものである。また $\alpha=1$ のとき

$$U=[-1/\{6(1-\exp(-t))\}]\ \{x^2-6(\exp t-1)^{2/3}\}$$

または,

$$U=[-1/\{6(1+\exp(-t))\}]\ \{x^2-6(\exp t+1)^{2/3}\}$$

を $U\equiv 0$ とつないだ型の解をもつ。幅は両者とも単調に増加する。振幅は前者では $t=\ln(3/2)$ で極小値をもち,後者では単調に増加する。この結果は2次関数型の有限なサポートをもつ初期値を与えても,その幅・振幅によりふるまいが異なることを陽に示し興味深い。

以上密度依存型の拡散をもつ非線形方程式の厳密解をいくつか示したが,非線形散逸系では神経波パルスの伝播や数種の生物の競合等,従属変数が複数であるシステムの解析が重要な問題である。また多次元の場合に興味深い現象がいくつか報告されている。これらの方程式に対して厳密な解の表示をうることができるかは今後の大きな課題である。

参考文献

1) W. I. Newman: Some exact solutions to a nonlinear diffusion problem in population genetics and combustion, J. Theor. Biol. **85** pp. 325–334 (1980).

2) Y. Hosono: Travelling wave solutions for some density dependent diffusion equations, preprint.

細い棒状弾性体の動力学

東大・教養　鶴　秀生,和達三樹

1) Introduction

細い棒状弾性体は,大きな変形まで考慮すると,静的な場合でも非常に複雑な形をとる。これは連続体であるための条件から,つり合いの方程式が非線形微分方程式となるからである。ここでは静的な形状を決定する方程式,ならびに運動方程式とそれにともなうソリトン解についての説明を行う。