を外れるともう少し複雑となる。この2次元の結果，および文献2の1次元の結果を母数を変えて実際に数値計算を行い，t が有限であるときの補正項に現われる安定($1 \gtrsim k$)，不安定($k \gtrsim 1$)なpattern の形状を示した。

結論として，過去に行われたHelfand-Tagami 方程式系のいろいろの近似に基く数値計算の結果に依らずに，いろいろの周期性が既に((6)の定常解を通じて)(1)に内在していることを1次元，2次元の場合に示した。

1) E. Helfand and Y. Tagami, J. Chem. Phys. **56**, (1972) 3592.
2) Y. Tagami, J. Math. Phys. **25**, (1984) 1372.
3) Y. Tagami, J. Chem. Phys. **80**, (1984) 2975.

Density-dependent diffusion in some biological models

京都産業大学　細　野　雄　三

個体群生態学に現われる密度依存拡散方程式は，個体群圧による拡散項と誕生死滅の結果としての生成項のカップリングにより個体群の時間的空間的存在様式を記述する。それらは退化する非線型放物型方程式で与えられ，その特徴は擾乱の有限伝播性である。我々の目的は，個々のモデルの数理的・数値的解析を通して密度依存拡散が各生物種にとってどの様にはたらくのかを明らかにすることである。

1) 密度依存拡散1種モデル

まず最初に単独の密度依存拡散方程式

$$u_t = (u^m)_{xx} + f(u), \ (m > 1) \tag{1}$$

を考察する。$u(x, t)$ は場所 x，時刻 t での個体群密度を表わす。我々は，非線型生成項 f として双安定(bistable)な場合，すなわち $f(u) = u(1-u)(u-a)$ $(0 < a < 1)$ の場合に話を限る。そのとき，(1)に対する進行波解 $u(x, t) = U(x - ct)$ が存在して，速度 c も一意に決まることが示される。線形拡散のときとは異って，進行速度 c の符号により進行波

解の形状が変化することが密度依存拡散の顕著な特徴である。

進行波解を比較関数として利用することにより，比較定理に基づいて初期値問題の解の挙動が議論できる。初期条件 $u(x,0)=\varphi(x)$，閾値 a および密度依存拡散のパラメータ m との関連においてその結果を述べる。

(i) $0<a<a^*(m)=(m+1)/(m+3)$ の場合。

初め種は有界な領域に生息し，その個体群密度が十分広い範囲にわたり閾値 a を越えている。すなわち，$\varphi(x)>0,\ x\in I=(a,b)$，$\varphi(x)=0,\ x\notin I$，$\varphi(x)>a,\ x\in I_1=(a_1,b_1)$ $(-\infty<a<a_1<b_1<b<+\infty)$，であって $l=b_1-a_1$ が十分大きいとする。このとき，種の生息域は $t\to+\infty$ のとき両側へ有限の速さで拡大し，個体群密度は任意の有界閉領域上で一定状態 $u=1$ に収束する。

(ii) $a^*(m)<a<1$ の場合。

初期の個体群の生息域が有界であるとき，$t\to\infty$ とすると個体群密度は全領域で一様に死滅状態に近づくが，その生息域は $t=\infty$ までこめて有界でありかつ有限時間で消滅することはない。

以上の結果から，密度依存拡散の指数 m が大きくなると，$a^*(m)$ が大きくなることに注意すると，環境が悪くなるなどによって閾値 a が増大しても m を大きくすることにより生息域を拡大し，種の存続を維持することが可能となる。しかしながら，閾値 a がたとえ小さくても，初期の個体群の分布がある程度の大きさである程度広い範囲にわたって分布していないとその種は生き残れない。ある初期条件に対して $t\to+\infty$ のとき個体群が死滅しても，m を大きくすると同じ初期条件に対して生き残ることが可能となる場合があることが数値実験の結果得られている。

2）集合効果を伴なう密度依存拡散１種モデル

モデル(1)においては $a=a^*(m)$ の場合を除いて，$t\to+\infty$ のとき空間的に一様な状態の解しか得られない（但し不安定解は除く）。我々は(1)に，仲間を認識しその個体数の多い方に集まろうとする集中効果を局所移流項としてとり入れたモデル

$$\begin{cases} u_t=\varepsilon^2(u^m)_{xx}+\varepsilon\lambda(K(u)u)_x+f(u) \\ K(u)=\int_{x-r}^{x}u(s,t)\,ds-\int_{x}^{x+r}u(s,t)\,ds \\ f(u)=u(1-u)(u-a) \end{cases} \tag{2}$$

を考え，その空間非一様定常解の存在を調べる。ここで，ε,λ,r,a は全て正の数であり

$0<a<1$である。さて，$0<a<a^*(m)$，εは十分小さい正数とする。そのとき，ある正数r^*が存在して，任意の$r>r^*$に対して(2)の非自明定常解$w_\varepsilon(x)$が存在して，その解は

$$\begin{cases} w_\varepsilon(x)=w_\varepsilon(-x), \quad x>0 \\ w_\varepsilon(x)>0, \quad x\in I_l\equiv\left(-\frac{l}{2},\frac{l}{2}\right), w_\varepsilon(x)\equiv 0, \ x\in \boldsymbol{R}^1\setminus I_l \end{cases}$$

をみたす。ここで，$l\leq r$である。我々はこの解を定常パルス解と呼ぶ。この定常パルス解をお互いr以上離して重ね合せた関数

$$\sum_{i=1}^{N} w_\varepsilon(x-x_i), \quad (|x_i-x_j|\geq l+r \quad \text{for} \quad i\neq j) \tag{3}$$

は再び(2)の非自明定常解が得られる。これは密度依存拡散の結果コンパクトサポートをもつ解が存在することにより成り立つことを注意しておく。我々は，初期値問題の解の$t\to+\infty$のときの漸近状態として種々の可能性を知っているが，数値実験の結果として，初期条件

$$\varphi(x)=\begin{cases} 1, & |x|\leq L \\ 0, & |x|>L \end{cases}$$

に対してLを大きくしていくと(3)の型の解に収束することが示され，Nも1, 2, 3,…… と複数個のピークを持つ解が得られた。その解析は今後の課題である。

3) 密度依存拡散2種競争モデル

次に(1)の発展として2種競争モデル

$$\begin{cases} u_t=\varepsilon^2(u^m)_{xx}+\left(a_1-b_1u-\dfrac{c_1 v}{1+e_1 u}\right)u \\ v_t=(v^n)_{xx}+\left(a_2-\dfrac{b_2u}{1+e_2 v}-c_2v\right)v \end{cases} \tag{4}$$

を考察しよう。ここで，係数は全て正定数であり，密度依存拡散指数m, nはともに1以上の定数である。(4)に対応する力学系((4)において拡散項のない方程式)は明らかに一方の種のみが生存する2つの状態$P_+=(0, a_2/c_2)$と$P_-=(a_1/b_1, 0)$を平衡状態としてもつ。我々はこれらの状態が漸近安定であると仮定しよう。さて初期状態において2つの種が異った領域に棲み分けている。すなわちsupp$[u(x,0)]\cap$supp$[v(x,0)]=\phi$とする。そのとき，両種とも方程式$u_t=\varepsilon^2(u^m)_{xx}+(a_1-b_1u)u$および$v_t=(v^n)_{xx}+(a_2-c_2v)v$にしたがって有限の速度で存在領域を拡大し有限時間後に両種は出会い以後(4)の非線型相互作用

の下でお互いの種の消長が決定される。その消長を(4)の進行波解を通して限られた場合であるが調べてみよう。ε は十分小さい正の数とし，$m \geq 1$, $n=1$ とする。そのとき，係数に適当な仮定の下で $(U(\pm\infty), V(\pm\infty)) = P_{\pm}$ をみたす進行波解 $(u(x,t), v(x,t)) = (U(x - \varepsilon c t), V(x - \varepsilon c t))$ が存在する。進行波解の速度 $\varepsilon c(\varepsilon)$ に対して $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} c(\varepsilon) = c^*$ が存在して，c^* の符号は $\int_0^{h(\beta^*)} f(u, \beta^*) u^{m-1} du$ の符号と一致する。ここで $h(\beta^*) = [a_1 e_1 - b_1 + \sqrt{(a_1 e_1 + b_1)^2 - 4 b_1 c_1 e_1 \beta^*}] / 2 b_1 e_1$ であり，β^* は $J(\beta) = \int_0^{\beta} g(h(v), v) v^{n-1} dv + \int_{\beta}^{a_2/c_2} g(0, v) v^{n-1} dv$ の零点である。この結果から ε が十分小さいとき $c(\varepsilon)$ の符号を代数的に決定でき $t \to +\infty$ でどちらの種が空間的に支配的になるかを知ることができる。数値実験によると $m=1$ のときの速度 c_1 と $m=2$ のときの速度 c_2 とすると $c_1 < c_2$ という結果が得られる。$n>1$ の場合も ε が十分小さく，係数が適当な仮定をみたすという条件の下で，速度の符号は $n=1$ のときと同様に決定できることが数値実験結果から結論できる。

我々は以上進行波解を媒介として密度依存拡散について数値的・数理的に検討してきた。そこで得られた結論は要約すると〝密度依存拡散効果は個体群の存続のために有利にはたらく〟ということができるであろう。

参 考 文 献

1) D. G. Aronson, Density dependent interaction-diffusion systems, in *"Dynamics and Modeling of Reactive Systems,"* Academic Press, (1980), 161–176.

2) M. E. Gurtin and R. C. MacCamy, On the diffusion of biological populations, Math. Biosci., **33** (1979), 35–49.

3) Y. Hosono, Traveling wave solutions for some density dependent diffusion equations, (to appear in Japan J. Appl. Math.).

4) Y. Hosono and M. Mimura, Singular perturbation approach to traveling waves in competing and diffusion species models, J. Math. Kyoto Univ., **22** (1982), 435–461.

5) N. Shigesada, K. Kawasaki and E. Teramoto, Spatial regregation of interacting species, J. Theor. Biol., **79** (1979), 83–99.