

(6) まとめ

以上のように、量子サインゴルドン系において、散逸は低温での振舞に顕著な影響を与える。更に、現在、ソリトンの拡散などの動的過程への影響を研究中である。

参 考 文 献

- 1) R. P. Feynmann; *Statistical Mechanics*, Chap. 3, W. A. Benjamin (1972).
- 2) A. O. Caldeira and A. J. Leggett; *Ann. Phys. (NY)* **149** 374 (1983); **153** 445 (1984).
- 3) K. Hida and U. Eckern; *Phys. Rev.* **B30** 4096 (1984).
- 4) K. Hida, *Z. Phys.* **B61** 223 (1985).
- 5) K. Hida, *Phys. Rev.* **B32** 4539 (1985).
- 6) K. Maki and H. Takayama, *Phys. Rev.* **B20** 3223 (1979); **20** 5002 (1979); **20** 5009 (1979).
- 7) K. Maki, *Phys. Rev.* **B18** 1641 (1978).
- 8) 中谷正吾, 修士論文 (北海道大学, 1986)

非線形拡散方程式と pattern formation

筑波大・物理 田 上 由紀子

1. 1960年代の終り頃から、高分子の複合系であるブロック共重合体といわれる物質にお



ABブロック共重合体

いて、相分離現象(ドメインの大きさがおよそ数100Åの程度であることから、マイクロ相分離と呼ばれる)が観測されている。電子顕微鏡写真に現われるこの、規則的なドメイン構造は、模式的に

- | | |
|------------------------|--------|
| 1次元……層状 (lamellar) | 図 c |
| 2次元……円柱状 (cylindrical) | 図 b, d |
| 3次元……球状 (spherical) | 図 a, e |

と分類することが出来る。これらの
マイクロドメイン — 界面の形成の理
論は Helfand と Tagami (文献1)



により行われた。その中心をなすものは、mean field 法により導かれた連立した非線形拡散方程式および、それと selfconsistent に用いられる。空間各点における分子種 A, B の密度

分布を表わす式である。これらの式の解は数値計算により初めて可能であり、実際これまでにいくつかの近似的な数値計算が行われている。

2. ここでは、ソリトン方程式の取扱い法を利用して、つぎの連立非線形方程式

$$\begin{cases} u_t = \alpha \nabla^2 u - [\beta v^2 + r(u^2 + v^2 - 1)] u \\ v_t = \alpha \nabla^2 v - [\beta u^2 + r(u^2 + v^2 - 1)] v \end{cases} \quad (1)$$

の周期解を調べ、ミクロ相分離現象に対応をさせる。(註：高分子の統計で拡散形方程式が出てくる場合、往々にして“ t ”は時間ではなく、長い高分子鎖の一端から分子に沿って測った長さを表わすことがある。(1)もその場合である。 ∇^2 は通常の間微分である。) (1)で α, β, r は定数($\beta \ll r$)である。(これらの定数の詳しい化学的議論は行わない。) u, v は空間の1点 \mathbf{r} における分子種A, Bの0~1に規格化した密度分布 $\rho_A(\mathbf{r}, t), \rho_B(\mathbf{r}, t)$ と

$$\rho_A(\mathbf{r}, t) = u^2, \quad \rho_B(\mathbf{r}, t) = v^2 \quad (2)$$

の関係にある。(2)は、高分子が十分長く、分子種A, B間の連結状態が問題にならないときのみ厳密に正しい式である。(1)について、1次元の非周期解(文献1)、1次元の周期解および非周期解(文献2, 3)は既に与えられているので、今回は2次元の周期解、非周期解について考察する。

(1)で u, v に関する対称性に着目し

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}, t) &= R(\mathbf{r}, t) \sin \theta(\mathbf{r}, t) \\ v(\mathbf{r}, t) &= R(\mathbf{r}, t) \cos \theta(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (3)$$

とすると次が得られる。

$$R_t = \alpha [\nabla^2 R - R(\nabla \theta)^2] - \frac{\beta R^3}{4} [1 - \cos(4\theta)] - rR(R^2 - 1) \quad (4)$$

$$R\theta_t = -\frac{\beta R^3}{4} \sin(4\theta) + \alpha [2(\nabla R) \cdot (\nabla \theta) + R\nabla^2 \theta] \quad (5)$$

$\varepsilon = \beta/r \ll 1$ を用いて R と θ を ε で展開する。

$$R = \sum_{n=0}^{\infty} R_n \varepsilon^n, \quad \theta = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \varepsilon^n$$

明らかに $R_0 = 1$ である。

3. θ_0 は次の式を満足する。

$$\theta_{0t} = \alpha \nabla^2 \theta_0 - \frac{\beta}{4} \sin(4\theta_0) \quad (6)$$

(6) の右辺=0 の式は多次元Sine-Gordon 方程式をなしている。いま、2次元……円柱状ドメイン模型に対応させるために、空間2次元のSine-Gordon 方程式の解のうち x, y について対称であるような周期解を選び、文献2の変換を用いると、(6)の解として

$$\theta_0(x, y, t) = \tan^{-1} [X(\xi) Y(\eta)] + C H(\xi, \eta) e^{-k^2 \beta t}, \quad (7)$$

$$\xi = (\beta/\alpha)^{1/2} x, \quad \eta = (\beta/\alpha)^{1/2} y,$$

C は任意定数

を得る。ここで

$$X(\xi) = \left(\frac{1-h(\xi)}{1+h(\xi)} \right)^{1/2}, \quad Y(\eta) = \left(\frac{1-h(\eta)}{1+h(\eta)} \right)^{1/2} \quad (8)$$

$$H(\xi, \eta; k) = \frac{h(\xi) + h(\eta)}{1 + h(\xi)h(\eta)} \quad (9)$$

$$h(\xi; k) = \begin{cases} \operatorname{sn} \left(\frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \xi, \frac{1}{k} \right), & k > 1 \\ \tanh \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \xi \right) & (k=1) \\ k \operatorname{sn} \left(\frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \xi, k \right), & 1 > k > 0 \end{cases} \quad (10)$$

これを用いると、(2)より分子種A, Bの規格化した密度分布は、 $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき

$$\rho_A(x, y, t) = \frac{1-H(\xi, \eta)}{2} + C H(\xi, \eta) \sqrt{1-H^2(\xi, \eta)} e^{-k^2 \beta t} \quad (11)$$

$$\rho_B(x, y, t) = \frac{1+H(\xi, \eta)}{2} - C H(\xi, \eta) \sqrt{1-H^2(\xi, \eta)} e^{-k^2 \beta t}$$

(11)と、文献2で既に与えられた1次元……層状ドメイン模型に対する結果とは形の上で1対1に対応しているが、1次元の場合と異り(10)の楕円関数の引数は係数がかかって来るので複雑である。(11)は、高分子が十分長いとき厳密に成り立つ。(7),(11)の右辺で、高分子が有限の長さであるための補正項は、楕円関数(10)の母数 k が1(このときが非周期解)

を外れるともう少し複雑となる。この2次元の結果、および文献2の1次元の結果を母数を変えて実際に数値計算を行い、 t が有限であるときの補正項に現われる安定 ($1 \geq k$), 不安定 ($k \geq 1$) な pattern の形状を示した。

結論として、過去に行われた Helfand-Tagami 方程式系のいろいろの近似に基く数値計算の結果に依らずに、いろいろの周期性が既に (6) の定常解を通じて (1) に内在していることを1次元, 2次元の場合に示した。

- 1) E. Helfand and Y. Tagami, J. Chem. Phys. **56**, (1972) 3592.
- 2) Y. Tagami, J. Math. Phys. **25**, (1984) 1372.
- 3) Y. Tagami, J. Chem. Phys. **80**, (1984) 2975.

Density-dependent diffusion in some biological models

京都産業大学 細野雄三

個体群生態学に現われる密度依存拡散方程式は、個体群圧による拡散項と誕生死滅の結果としての生成項のカップリングにより個体群の時間的空間的存在様式を記述する。それらは退化する非線型放物型方程式で与えられ、その特徴は擾乱の有限伝播性である。我々の目的は、個々のモデルの数理的・数値的解析を通して密度依存拡散が各生物種にとってどの様にはたらくのかを明らかにすることである。

1) 密度依存拡散1種モデル

まず最初に単独の密度依存拡散方程式

$$u_t = (u^m)_{xx} + f(u), \quad (m > 1) \quad (1)$$

を考察する。 $u(x, t)$ は場所 x , 時刻 t での個体群密度を表わす。我々は、非線型生成項 f として双安定 (bistable) な場合、すなわち $f(u) = u(1-u)(u-a)$ ($0 < a < 1$) の場合に話を限る。そのとき、(1) に対する進行波解 $u(x, t) = U(x - ct)$ が存在して、速度 c も一意に決まることが示される。線形拡散のときとは異って、進行速度 c の符号により進行波