共鳴周波数 ω_i は，先に述べたとおり，M（終状態の2つの量子ソリトンのうち一方に含まれる粒子数）の関数である。（図2）

したがって，$M \ll N/2$ なる ω_i をえらべば，終状態には大きさのちがう2つのソリトンが得られるし，$M \sim N/2$ なる ω_i をえらべば，大きさのほぼ等しい2つのソリトンが得られる。

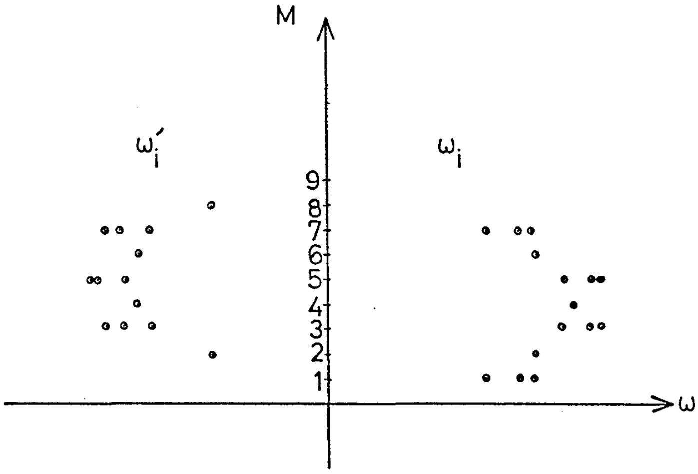


図　2

§6　今後の展望

今回発見された resonant breakup という現象が，他の量子ソリトン系及び古典ソリトン系でみつかることは大いに期待できる。また，系に散逸が加わったときに，素過程としての resonant breakup がアトラクタ間の飛びうつりにどう寄与するか興味深い。更に基本的な問題として，可積分量子系の特徴付けと量子系のKAM理論が重要である。

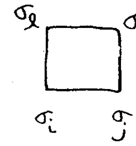
ソリトンは，発見されて以来，その安定性が注目を集めてきた。一方，系が複雑な挙動を示すためには，ソリトン数が変化するようなプロセスが重要である。ソリトンの生成と消滅に関して resonant breakup は基本的な過程であると予想することが可能である。

3状態ＩＲＦの厳密解
―ロジャース，ラマヌジャン恒等式のゴルドン一般化―

東大・教養　国場敦夫，阿久津泰弘，和達三樹

ＩＲＦとは2次元正方格子上の4体スピン相互作用の模型である。各格子点 $i \in Z^2$ にスピン変数 $\sigma_i \in S$ を置き，図1のような格子の最小単位（face または plaquette）に minimal な相互作用エネルギー $\varepsilon(\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k, \sigma_l)$ を与える。(*I*nteraction *r*ound a *f*ace)

ここで，S は適当な数の集合であり，例えば $S=\{0,\ 1\}$ なら2状態模型，$S=\{0, 1, 2\}$ なら3状態模型 etc … となる。系の全エネルギーは



$$E = \sum_{\text{faces}} \varepsilon(\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k, \sigma_l) \tag{1}$$

図　1

で与えられる。いま,

$$W(\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k, \sigma_l) = \exp\left[\frac{-\varepsilon(\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k, \sigma_l)}{k_B T}\right] \tag{2}$$

なる量を考えると，これは図１の IRF 配置の Boltzmann weight となるから，分配関数を Z とすると

$$Z = \sum e^{-\beta E} \quad (\beta^{-1} = k_B T)$$

$$= \sum \prod_{\text{faces}} W(\sigma_i, \sigma_j, \sigma_k, \sigma_l) \tag{3}$$

となる。ここで $\sum$ は状態和を表わす。

あるクラスのＩＲＦ模型と頂点模型は Wu-Kadanoff-Wegner 変換により同等となる。

いま k - 状態模型を考えると，一般には k^4 個のＩＲＦ配置が存在する。これに対応して Boltzmann weight も k^4 個あるが，このうち全体を定数倍する自由度は trivial なので，相互作用の全空間 T は k^4-1 次元の射影空間となる。Baxter [1] は系のサイズが無限大の極限で Z が厳密に求まるためには，３つの Boltzmann weight のセット $\{W(a, b, c, d)\}$, $\{W'(a, b, c, d)\}$, $\{W''(a, b, c, d)\}$ $(a, b, c, d \in S)$ があって k^6 個の関係式

$$\sum_c W(b, d, c, a) W'(a, c, f, g) W''(c, d, e, f) \tag{4}$$

$$= \sum_c W(c, e, f, g) W'(b, d, e, c) W''(a, b, c, g)$$

をみたすことが十分条件であることを示した。(4)を star-triangle relation (ＳＴＲ) と呼ぶ。（図２　参照）

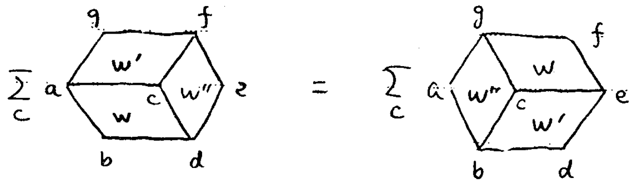


図　2

ＳＴＲは転送行列の交換条件であり，解けるモデルに普遍的に現われる関係式である。では(4)を満たすような Boltzmann weight のセットをいかに見つけるか？　これに対し，現在知られているほとんどの場合は次のようにする。まず，spectral parameter と呼ばれる変数 u を導入し，W, W', W'' にそれぞれ u, u', u'' を割りあてる。次に

$$u'' = u' - u \tag{5}$$

により，(4)を k^4 個の未知関数 $W(a, b, c, d\,; u)$ に対する関数方程式にして解く。つまり T のすべての点ではないが，その中に u でパラメトライズされる "solvable line" を見いだそうとするわけである。この方法（量子逆散乱法，ＱＩＳＭ）によればＳＴＲ(4)が解を持てば解ける格子模型がつくれるわけで，新しい厳密解を systematic に探すことが可能となる。数学的に言う

と解ける相互作用は相互作用の全空間 T の中で部分多様体をなし，そのひとつの既約成分を R とすると

$$\pi : R \rightarrow B$$

というfiber spaceの構造を持つ。この場合，各々の fiber $R_t = \pi^{-1}(t)$，$t \in B$ は u でパラメトライズされる1次元空間であり，base space B の自由度は大雑把に言って温度に相当する。これまでに解かれたＩＲＦのうち，もっとも典型的な例は Baxterの hard hexagon モデルである。これは2状態（$\sigma_i = 0, 1$）で，対称性

$$W(a, b, c, d) = W(c, b, a, d) = W(a, d, c, b) \tag{6}$$

と最隣接スピン σ_i，σ_j に対する制限

$$0 \leq \sigma_i + \sigma_j \leq 1 \tag{7}$$

を課したモデルである。$\sigma_i = 1$ スピンを中心とする6角形を描くと条件(7)は6角形同志がかさならない条件となる（但しあるパラメータ域で）ので，こういう名前がついている。我々は3状態（$\sigma_i = 0, 1, 2$）で対称性(6)と最隣接スピン σ_i，σ_j に対する条件

$$0 \leq \sigma_i + \sigma_j \leq 2 \tag{8}$$

を課したＩＲＦのＳＴＲを解いた。格子気体的描像としては，$\sigma_i = 2$ を大きなhexagon，$\sigma_j = 1$ を小さなsquareと見て，hard hexagonとhard squareのmixtureと思うこともできる。この場合，許されるＩＲＦ配置は26個，独立なBoltzmann weightは15個，ＳＴＲが37個となる。解はヤコビの楕円シータ関数

$$\theta_1(u, q^2) = \sin u \cdot \prod_{n=1}^{\infty}(1 - 2q^{2n}\cos 2u + q^{4n})(1 - q^{2n}) \tag{9}$$

によってパラメトライズされる。詳しくは文献2）を見られたい。

こうして u でパラメトライズされたBoltzmann weightを用いるとfree energyやspin densityを厳密に計算できるのだが，ここではそれに関する技術的な話はスキップしてspin densityの表式が数論的問題にかかわってくることを説明しよう。突然であるが，表題にあるRogers-Ramanujanの恒等式とはオリジナルには次の2つである。

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5n+1})(1-q^{5n+4})} \tag{10. a}$$

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n^2+n}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-q^{5n+2})(1-q^{5n+3})} \quad (10.\,b)$$

(10)式は自然数 n の分割に関する数論的事実の表現になっている。それを見るために，次のように量 $F(\sigma_1, q)$ $(\sigma_1 = 0, 1)$ を定義しよう。

$$F(\sigma_1, q)=\sum{}' q^{\sum_{i=1}^{\infty} i\sigma_{i+1}} \quad (11)$$

ここで$\sum'$とは σ_2, σ_3, $\cdots = 0, 1$ に対する和であり，

$$0 \le \sigma_i + \sigma_{i+1} \le 1, \quad i \le 1 \quad (12)$$

の制限のもとでとる。(11)の F は(12)の $i = 1$ の場合の条件式を通して σ_1 の関数となる。簡単な計算により，$F(0, q)$，$F(1, q)$ はそれぞれ(10. a)，(10. b)の左辺に一致することがわかる。では(11)の右辺で q^l の係数はいくつだろうか？それは自然数 l を(12)の制限のもとに

$$l = \sigma_2 + 2\sigma_3 + 3\sigma_4 + \cdots \quad (13)$$

の形に分割するし方の数である。数論の定理によると，これは mod 5 でみて，$n \neq 0, \pm(2-\sigma_1)$ の数にのみ分割するし方の数に等しい。このことから Rogers-Ramanujan 恒等式(10)が導かれる。実際(10)の両辺は上記の分割の生成関数となっている。注目すべきは自然数の分割のし方に課された条件(12)が hard hexagon のハードコア条件(7)に他ならないことである。実際 Baxter による corner transfer matrix 法[1)]を用いて spin density $<\sigma_1>$ を計算すると，hard hexagon モデルに対し，（あるパラメタ領域で）

$$<\sigma_1> = \frac{r_0^{\,2} F(1, q)}{F(0, q)+r_0^{\,2}F(1, q)} \quad (14)$$

を得る。（r_0，q は Boltzmann weight に関係するパラメタ）大雑把に言うと，$F(\sigma, q)$とは σ_1 が σ の値をとるときの全平面の Boltzmann weight である。このようにＩRF の特徴的な様相は corner transfer matrix 法により spin density の厳密な表式を計算するとＩRＦスピンの配列が，Rogers-Ramanujan type の恒等式が持つ自然数の分割パターンと対応するところにある。この R–R type の恒等式により(14)は単項式（無限乗積）に整理され，臨界点近傍の振る舞いが解析可能となる。こういう観点からすると hard hexagon の可解性は Rogers-Ramanujan恒等式の存在に帰するともいえよう。一方，数論においてはＲ－Ｒ恒等式のさまざまなバラエティが考えられている。では他の R–R type の恒等式によりその可解性が期待されるＩRＦモデルはないだろうか？これにそぐうものが，表題の Gordon's generalization of Rogers-Ramanujan identities

(GGRRI) である。この拡張された Rogers-Ramanujan 恒等式の左辺が持つ自然数の分割パターンをＩＲＦ スピンの言葉に翻訳したものが，我々のモデルの条件式(8)なのである。実際$<\sigma_1>$を計算すると(14)の３状態へ拡張された表式を得る。詳しくは文献２）を見られたい。

以上，解けるＩＲＦの背後に Rogers-Ramanujan typeの恒等式があることを強調したが，実はR–R type 恒等式の背後にはユークリッド型 Kac-Moody Lie 環の表現論がある。だとすれば，可積分性を特徴付けるＳＴＲ(4)の代数的構造はこの無限次元の代数とどうかかわるのか？その解明は今後の課題である。

参　考　文　献

1) R. J. Baxter: *Exactly Solved Models in Statistical Physics.* (Academic Press, 1982)

2) A. Kuniba, Y. Akutsu and M. Wadati, exactly solvable IRF models I, J. Phys. Soc. Jpn., to appear.

Prolongation Structures of Nonlinear Equations and Infinite Dimensional Algebras

筑波大・物理　表　　　　実

２次元の積分可能な非線形系は，Prolongation 構造をもつ。この報告では，この観点から非線形方程式に特有な無限次元代数について調べる。

一般に局所座標q^m（$m=1, 2, \cdots$）をもつ空間の Vector 場$V_a(q)$は

$$V_a(q) = V_a^{(m)}(q)\frac{\partial}{\partial q^m} \ ,$$

とあらわされ，交換子積

$$[V_a, V_b] = (V_a^{(n)}\partial n V_b^{(m)} - V_b^{(n)}\partial n V_a^{(m)})\frac{\partial}{\partial q m} \ ,$$

をもつ。今無限次元空間（q_1^m，q_2^m）（$m=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$）の Vector 場$\overset{(m)}{T}_a$（$a=1, 2, 3$），$\overset{(m)}{D}$

$$\overset{(m)}{T}_1 = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\{ q_1^{(n+m)}\frac{\partial}{\partial q_1^{(n)}} - q_2^{(n+m)}\frac{\partial}{\partial q_2^{(n)}}\} \ ,$$