

一の性質をもつようになる。計算できる5次までの高次相関関数について述べると、奇数次はすべて零、2次は $\delta$ 型、4次は ${}^{(4)}C(0, \tau, \tau)$ 以外すべて零となる。しかも4次は2次の対の積で表わされる。これはガウス過程の示す相関関数の性質ではあるが、<sup>(2)</sup>これらの写像によって生成される時系列の普遍測度は依然として一様分布になっている。このことはチェビシェフマップについても言えることである。チェビシェフマップによるカオス時系列の高次相関関数は文献(3)を参照。また4つの一次元パイコね変換の高次相関関数及び詳しい議論は文献(1)参照。

### 参考文献

- 1) Y. Nagai, A. Ichimura, T. Tsuchiya, Phys. Lett. **112A** (1985) 259.
- 2) M. Nelkin, A. M. S. Tremblay, J. Stat. Phys. **25** (1981) 253.
- 3) T. Geisel, V. Fahren, Phys. Lett. **105A** (1984) 263.

### 記号力学系の高次相関関数

CSK総研 土 屋 尚  
早大・理工 市 村 純  
麻布大 永 井 喜 則

別の講演でも示したように、我々は最も発達した一次元カオス (fully developed chaos) に対する高次相関関数を厳密に求めた<sup>1)</sup>。我々の立場は相関関数の組で系の性質を規定しようとする確率過程論的なものである。ここでは fully developed chaos より得られる記号力学系の高次相関関数も同様に厳密に計算できることを示す。記号力学系を調べるモチベーションにはまず元の系の性質をより単純に把握できる可能性があることがある。又より実際的には、カオスを観測する際、機器の分解能等のため必然的に記号化したのと同じ効果が現われてしまうことがある。

単位区間上のリターンマップ  $f(x)$  に対して不変測度が

$$\rho(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \delta [x - f^i(x_0)] \quad (1)$$

で与えられているとする。ここに  $f^i(x_0)$  は初期値  $x_0$  より出発して  $i$  回マッピングを繰り返した結果を表わす。  $f^i(x_0) \equiv x_i$  を記号化して  $\sigma_i$  という記号を与える操作を  $S$  とかく。つま

り

$$\sigma_i = S(x_i) = S(f^i(x_0)) \quad (2)$$

である。すると記号列の(時間)平均は

$$\bar{\sigma} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N S(x_i) \quad (3)$$

であるが、(1)より

$$\bar{\sigma} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N \int_0^1 S(x) \delta(x - x_i) dx = \int_0^1 S(x) \rho(x) dx \equiv \langle \sigma \rangle \quad (4)$$

となって、元のマップ  $f$  に対する不変測度を使って記号系の平均値が計算できる。同様に記号列の二次相関関数も

$$\begin{aligned} C_k &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N (S(x_{i+k}) - \bar{\sigma})(S(x_i) - \bar{\sigma}) \\ &= \int_0^1 (S(f^k(x)) - \langle \sigma \rangle)(S(f(x) - \langle \sigma \rangle)) \rho(x) dx \end{aligned} \quad (5)$$

で計算可能であり、三次相関  $C_{k,l}$ 、四次相関  $C_{k,l,m}$  ( $0 \leq k \leq l \leq m$ ) 等も同様である。原理的には不変測度が与えられていれば任意の相関関数が計算できる訳だが、実際には、 $f^k(x)$  の関数形が扱い易いものでなければ厳密な答を得ることは難しい。我々は区分線形マップで対称性の高いものに話を限る。又記号の割当ては均等に行なわれるものとする。

標準的ベーカー変換  $f(x_i) = 2x_i \pmod{1}$  (我々はこれをSBマップと呼ぶ) に対する結果を表1に示す。表2にテントマップ(TB)の結果をまとめる。比較のため表3には二、三、四記号系であって記号の出現が完全に等確率で独立に起るという理想的記号系を仮定した時の結果を示した。\*の印は、書ききれないため二時間について結果のみを記入したが、三時間、四時間についての値が有限に残る場合があることを表わす。

これらの表からわかることをまとめる。

- i) SBとTBは文献(1)で明らかにしたように元々は違った相関関数の組を与えるのであるが、0と1の記号を割当てる二分割系では理想的無想関係と同じ組を与えている。
- ii) しかし三分割以上の記号系ではSBとTBはそれぞれ違った、元の系の特徴を反映したと見られる相関関数の組を与える。

i)の結果はSBやTBは二進数展開するとベルヌイ系を生むというよく知られた結果に対応するもので理解し易い。一般にSBやTBから得られる数列は分割が有限である限りそれ

表1. SBマップ ( $f(x_i) = 2x_i \pmod{1}$ ) の記号系の各種相関関数

記号数 (分割数) 相関関数	オリジナル ( $\infty$ )	2	3	4
2 次	$\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2^k}$	$\frac{1}{4} \cdot \delta_{k,0}$	$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2^k}$	$C_0 = \frac{5}{36}$ $C_1 = \frac{1}{18}$ $C_k = 0 \quad (k \geq 2)$
3 次	0	0	0	0
4 次	$-\frac{1}{15} \cdot \frac{1}{2^{-k-\ell+3m+3}}$ $+\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2^{-k+\ell+m+3}}$ $+\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2^{-k-\ell+m+4}}$	$\frac{1}{16} \delta_{k,0} \delta_{m-\ell,0}$	$C_{00k} = \frac{1}{24} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ $C_{011} = \frac{1}{48}$ $C_{022} = \frac{1}{32}$ $C_{033} = \frac{5}{192}$ $C_{044} = \frac{11}{384}$ $\vdots$ $C_{kkk} = \frac{1}{48} \left(\frac{1}{2}\right)^k$	$C_{000} = \frac{41}{1296}$ $C_{001} = \frac{13}{648}$ $C_{00k} = 0 \quad (k \geq 2)$ $C_{0kk} = \frac{25}{1296} \quad (k \geq 1)$ $C_{111} = \frac{7}{648}$ $C_{kkk} = 0 \quad (k \geq 2)$

\* 三、四時間についての相関関数にも有限の値が残る場合がある。

表2. TBマップ (テントマップ) の記号系の各種相関関係

記号数 (分割数) 相関関数	オリジナル ( $\infty$ )	2	3	4
2 次	$\frac{1}{12} \cdot \delta_{k,0}$	$\frac{1}{4} \delta_{k,0}$	$\frac{1}{6} \delta_{k,0}$	$\frac{5}{36} \delta_{k,0}$
3 次	$-\frac{1}{12} \delta_{k,0}$ $\times \frac{1}{2^{2(\ell-k)}}$ $\times (1 - \delta_{\ell-k,0})$	0	$\frac{1}{24} \cdot \frac{(-1)^\ell}{2^{\ell-1}} \delta_{k,0}$	$-\frac{1}{27} \delta_{k,0} \delta_{\ell-1,0}$
4 次	$\left(\frac{1}{144} + \frac{1}{180} \cdot \frac{1}{2^{\ell-k}}\right)$ $\times \delta_{k,0} \delta_{m-\ell,0}$ $+\frac{1}{12} \delta_{k,0} \frac{1}{2^{2(m-k)}}$ $\times (1 - \delta_{\ell-k,0})$ $\times (1 - \delta_{m-\ell,0})$	$\frac{1}{16} \delta_{k,0} \delta_{m-\ell,0}$	$C_{000} = \frac{1}{24}$ $C_{00k} = 0 \quad (k \geq 1)$ $C_{011} = \frac{1}{48}$ $C_{022} = \frac{1}{32}$ $C_{033} = \frac{5}{192}$ $C_{044} = \frac{11}{384}$ $\vdots$ $C_{kkk} = 0 \quad (k \geq 1)$	$C_{000} = \frac{41}{1296}$ $C_{00k} = 0 \quad (k \geq 1)$ $C_{0kk} = \frac{25}{1296} \quad (k \geq 1)$ $C_{kkk} = 0 \quad (k \geq 1)$

\* 三、四時間についての相関関数にも有限の値が残る場合がある。

表 3. 記号の出現が独立で等確率な理想的二, 三, 四記号系の各種相関関数

記号数 (分割数) 相関関数	2	3	4
2 次	$\frac{1}{4} \delta_{k,0}$	$\frac{1}{6} \delta_{k,0}$	$\frac{5}{36} \delta_{k,0}$
3 次	0	0	0
4 次	$\frac{1}{16} \delta_{k,0} \delta_{m-l,0}$	$C_{000} = \frac{1}{24}$ $C_{0kk} = \frac{1}{36} (k \geq 1)$ 他はすべて 0	$C_{000} = \frac{41}{1296}$ $C_{0kk} = \frac{25}{1296}$ 他はすべて 0

らが決定論的に得られたことのヒントはないと信じられていて<sup>2)</sup> その原因はおそらくこの二記号系でベルヌイ化される事実のためであろう。

しかし我々は, ii) の結果を得たことにより, 分割数を変化させて高次相関をとることにより決定論的に生成されたことのヒントが得られるのはもちろん, 元々のマップの違いさえ推量できる可能性があると考えている。

参考文献

- 1) 永井, 市村, 土屋「物性研究」本号。  
 T. Tsuchiya and A. Ichimura, Phys. Lett. **101A** (1984) 447.  
 Y. Nagai, A. Ichimura and T. Tsuchiya, Phys. Lett. **112A** (1985) 259.
- 2) J. Ford, Phys. Today No. 4, p. 40 (1983).