

逆周期倍化分岐による間欠性カオスの スペクトル構造 . I. 現象論的アプローチ

九大・理 岡本寿夫, 森 肇, 黒木昌一

§ 1. Introduction

散逸系の周期運動から発生するカオスのひとつに間欠的カオスがあり¹⁾ 実験的にも流体の熱対流²⁾ 非線形電気回路や化学反応系などにおいて観測されている^{3,4)} また、その理論的研究も行なわれており、最近、一次元写像を使って間欠的カオスのパワースペクトルを解析する手法が報告された⁵⁻⁹⁾

ここでは、Dubois 等²⁾ によるシリコン油の熱対流の実験で対流層内の温度勾配の時系列が示す間欠的カオスの解析を森等による現象論的理論⁷⁻⁹⁾ を適用して行なう。

§ 2. Dubois-Rubio-Berge の実験

Dubois 等²⁾ はシリコン油 (Prandtl 数 = 38) の熱対流の実験をアスペクト比が $\Gamma_x = 2$, $\Gamma_y = 1$ の長方形セルで行ない、対流層内の温度勾配 $\nabla_z T$ の時間変化を観測した。Rayleigh 数 R が $377 < R/R_c < 416.7$ (R_c は対流発生の臨界値) のとき $\nabla_z T$ は図 1.a のように安定な振動を示すが、 $R/R_c \geq 416.7$ のときは図 1.b のような間欠的カオスを示した。図 1.a の周期 1 の振動に対して図 1.b ではラミナーな部分の振動が周期倍化を起しており、しかも、振動は不安定である。その振幅のずれは時間と共に増大して、やがて、バーストが起る。これが表題の逆周期倍化分岐である^{3,4)} 図 1.b の振動の振幅の極大値 $\{x_n\}$ を順次プロットすることにより次の一次写像を得る。

$$x_{n+1} = f(x_n) = -(1 + \epsilon)x_n + Ax_n^2 + Bx_n^3 + \dots \quad (1)$$

これは type 3 の間欠的カオスに外ならない¹⁾

Dubois 等は $R/R_c = 420.4$ の場合に図 1.b の高い方の極大値 (○印) のみを順次プロットすることにより、次の写像を実験的に得た。

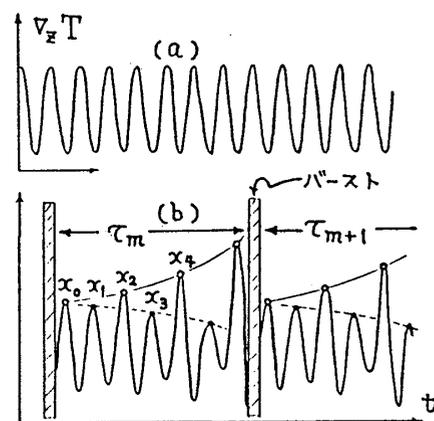


図 1. Dubois et al²⁾ の実験結果の模式図.
熱対流層内の温度勾配 $\nabla_z T$ の時間変化.
a) $377 < R/R_c < 416.7$. 周期 1 の振動.
b) $R/R_c \geq 416.7$. 逆周期倍化分岐の発生後.

$$x_{n+2} = f^2(x_n) = (1 + 2\varepsilon)x_n + 2x_n^3. \quad (2)$$

これは(1)で $A = 0$, $B = -1$ とおいたものである。更に, パラメター ε の値として $\varepsilon = 0.098$ を得た。

§ 3. 連続近似と τ_m の分布

(2)は連続近似^{1,2,7,9)}を行なうと, x_n は微分方程式の解として近似的に次のように求まる。

$$x_n^2 / (x_n^2 + \varepsilon) = J(x_0) e^{n/\tau_c} \quad (3)$$

ただし, $J(x) \equiv x^2 / (x^2 + \varepsilon)$, $\tau_c \equiv 1 / 2\varepsilon$ は特性時間であり, x_0 はラミナーな部分の振幅の最初の極大値である。初期値 x_0 は $0 \leq x_0 \leq x_s$ の範囲に限られるとし, また, x_n があるしきい値 x_B を越えるとバーストが起こるものとする。このとき, m 番目のラミナー区間の継続時間 τ_m は, (3)で $n = \tau_m$, $x_n = x_B$ とおいて得られる。

$$\tau_m = \tau_c \ln (J(x_B) / J(x_0)). \quad (4)$$

さらに, τ_m ($m = 1, 2, \dots$) の最小値を τ_s とすれば, (3)を使って $J(x_B) = J(x_s) \exp(\tau_s / \tau_c)$ となる。

初期値 x_0 が区間 $[0, x_s]$ で一様に分布すると仮定すると, ラミナー状態への再投入確率密度は $P(x_0) = 1/x_s$ となる。このとき, m 番目のラミナー区間の継続時間が τ_m である確率密度 $W(\tau_m)$ は

$$W(\tau_m) = P(x_0) |dx_0/d\tau_m| = \frac{W_0}{2\tau_c} \cdot \frac{e^{-(\tau_m - \tau_s)/2\tau_c}}{[1 - J_s e^{-(\tau_m - \tau_s)/\tau_c}]^{3/2}} \quad (5)$$

で与えられる。ただし, $W_0 \equiv \sqrt{1 - J_s}$, $J_s \equiv J(x_s)$ である。また, $\tau_m > t$ であるような積算確率 $N(t)$ は

$$N(t) = \int_t^\infty d\tau_m W(\tau_m) = \frac{W_0 e^{-(t - \tau_s)/2\tau_c}}{[1 - J_s e^{-(t - \tau_s)/\tau_c}]^{1/2}} \quad (6)$$

となる。

§ 4. 現象論的パワースペクトル

森等⁷⁻⁹⁾ は間欠的カオスのパワースペクトルはラミナー区間の長さ $\{\tau_m\}$, 区間内の極大点の振幅変化 $\{x_n\}$ 及びバーストの前後での位相の飛び $\{\xi_m\}$ の特性関数を使って表わされ

ることを示した。 τ_m の特性関数 $U(\omega)$ は次式で与えられる。

$$U(\omega) \equiv \langle \exp(-i\omega\tau_m) \rangle = \exp[-i\omega\tau(\omega) - r(\omega)] \\ = \int_{\tau_s}^{\infty} d\tau W(\tau_m) \exp(-i\omega\tau_m). \quad (7)$$

位相の飛びがない($\xi_n = 0$)としよう。このとき、パワースペクトル $S(\omega)$ は $\tau(\omega)$ と $r(\omega)$ を使って

$$S(\omega) = CF_A(\omega)/G(\omega), \quad F_A(\omega) = e^{2r(\omega)} - 1, \\ G(\omega) = e^{2r(\omega)} + 1 - 2e^{r(\omega)} \cos(\omega\tau(\omega)), \quad (8)$$

で与えられる。ただし、 C はある定数であるが以下では1とおく。 $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき、 $1 \ll \omega\tau_c \ll 1/W_0^2$ のところでは次の漸近形が得られる。

$$\tau(\omega) \simeq \tau_s + \sqrt{\frac{\pi}{2}} W_0 \tau_c (\omega\tau_c)^{-1/2}, \quad (9)$$

$$r(\omega) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2}} W_0 (\omega\tau_c)^{1/2},$$

$$S(\omega) \simeq (2\pi W_0 \omega\tau_c)^{-1/2} \propto \omega^{-1/2}. \quad (10)$$

図2は $\varepsilon = 0.098, 10^{-2}, 10^{-3}$ 及び 10^{-6} の各場合について(8)で計算したパワースペクトルを示したものである。 $\varepsilon = 0.098$ ではほぼ等間隔に並んだピーク列となる。これは $\tau_s > 0$ であることに起因する $V_z T$ の相関関数の振動によるもので、その周期は ω の大きいところではほぼ $2\pi/\tau_s$ である。従って、 $\tau_s = 0$ のときにはピーク列は現われない。 ε を小さくするにつれてピークの振幅は減少する。 $\varepsilon = 10^{-3}$ の付近でピーク列は消失し、 $\omega = 0$ のピークのみが支配的となる。更に、 ε を小さくすると $S(\omega)$ は $1/\sqrt{\omega}$ に漸近し(10)に一致する。

一般に、 τ_m の分布の幅 σ が τ_m の平均値 $\bar{\tau}$ に比して $\sigma/\bar{\tau} \geq 1$ のときピーク構造は消失すると予想される。実際に、 $\varepsilon = 10^{-3}$ 及び 10^{-4} のとき、 $\sigma/\bar{\tau} = 1.52$ 及び 2.44 となる。ただし、 $\tau_s = 22.2$ 分とした。また、 $\varepsilon \rightarrow 0$ での漸近形は $\sigma/\bar{\tau} \propto \varepsilon^{-1/4}$ である。

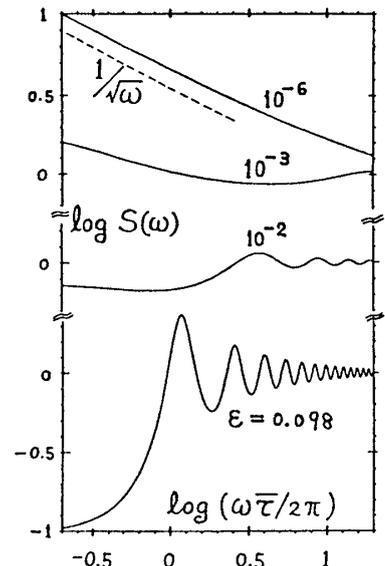


図2. パワースペクトル $S(\omega)$ vs $\omega \bar{\tau}/2\pi$ のlog-logプロット。 $\varepsilon = 0.098, 10^{-2}, 10^{-6}$ 。ただし、 $\bar{\tau} \equiv \langle \tau_m \rangle$ 。

なお、位相の飛びがあるときには、 $\epsilon \rightarrow 0$ のとき、 $S(\omega)$ の漸近形は $1/\omega^{3/2}$ に比例する。

References

- 1) Y. Pomeau and P. Manneville, Commun. Math. Phys. **74** (1980) 189.
- 2) M. Dubois, M. A. Rubio and P. Berge, Phys. Rev. Lett. **51** (1983) 1446.
- 3) H. Mori, K. Shobu, B. C. So and H. Okamoto, Physica Scripta **T9** (1985) 27.
- 4) 森 肇, 月刊フィジクス **6** (1985) 522.
- 5) I. Procaccia and H. Schuster, Phys. Rev. **A28** (1983) 1210.
- 6) B. C. So, N. Yoshitake, H. Okamoto and H. Mori, J. Stat. Phys. **36** (1984) 367.
- 7) K. Shobu, T. Ose and H. Mori, Prog. Theor. Phys. **71** (1984) 458.
- 8) B. C. So and H. Mori, Prog. Theor. Phys. **72** (1984) 1258.
- 9) H. Mori, B. C. So and S. Kuroki, Physica D (to be Published).

逆周期倍化分岐による間欠的カオスのスペクトル構造. II.

再投入に対する一次元写像モデル

九大・理 黒木昌一, 森 肇, 岡本寿夫

同じ表題の「I. 現象論的アプローチ」(岡本, 他)では, 逆周期倍化によって起こる type 3 の間欠的カオスに, 森らのパワースペクトルに対する現象論的理論⁷⁻⁹⁾を適用し, Duboisら²⁾による実験の解析を行ったが, ここでは, 具体的に一次元写像のモデルを使い, パワースペクトル等を数値計算により求め, 「I.」の結果と比べる。間欠的カオスのラミナー状態は, 一次元写像で十分に記述できる。これに対して, バースト及び再投入には, 一般により大きな自由度が関与すると考えられるが, ここでは, 一次元写像のモデルを使う。

森らによる間欠的カオスのパワースペクトルの現象論的理論では, 実験等で得られる時系列を, 長さを見捨てるバーストで区切られた, ランダムな長さのラミナー状態と, とらえる。 n 番目のバーストと $(n+1)$ 番目のバーストの間のラミナー状態の長さを τ_n とし, n 番目のバーストのときにおこる位相のとびを ξ_n とすると, $\{\tau_n\}$ の特性関数と, $\{\xi_n\}$ の平均と, 分散でパワースペクトルが決まる。位相のとびがない場合は, 振幅変調の影響が効いてくる。そして, パワースペクトルがピーク列構造をしているかどうかは, τ_n の平均 $\bar{\tau} = \langle \tau_n \rangle$ と, ゆらぎ $\sigma = \sqrt{\langle (\tau_n - \bar{\tau})^2 \rangle}$ の比 $\sigma/\bar{\tau}$ を調べればよい⁹⁾。そこで, まず, $\sigma/\bar{\tau}$