Title	2次元ポアンカレー写像のスペクトル(低次元カオスIII,カオスとその周辺,研究会報告)
Author(s)	森, 肇; 森田, 照光; 泰, 浩起; 堀田, 武彦
Citation	物性研究 (1986), 46(2): 212-214
Issue Date	1986-05-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/92009
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

ここで，$\tau(\omega)$，$\gamma(\omega)$ は $\{\tau_n\}$ の特性関数を用いて，

$$< e^{-i\omega\tau_n} > \equiv e^{-i\omega\tau(\omega)-\gamma(\omega)} \tag{4}$$

と定義し，$B(\omega)$ は

$$B(\omega) \equiv \frac{1}{\tau_c} < \int_0^{\tau_n} ds\, \hat{A}_n(s)\, e^{-i\omega s} > \tag{5}$$

である，又，(1)は対応して，$\omega_0 = 0$，$\phi_n = 0$ の場合を書き下した。$\tau(\omega)$，$\gamma(\omega)$の関数形については〔2, 3〕で詳しく論じられている。

$\tau(\omega)$ と $\gamma(\omega)$ を数値的に求め，それらを用いて，(3)を計算し，それを rescale したものが，図 3 である。図 2 と比較して，b 依存性を含めて，この描像は間欠的カオスの本質をよく捕えていることが分る。

参考文献

1) B. C. So and H. Mori, Prog. Theor. Phys. **72** (1984), 1258.
2) B. C. So and H. Mori, "Asymptotic Shapes of Power Spectra of Intermittent Chaos near its Onset Point" (to be published in Physica D)
3) H. Mori, B. C. So and S. Kuroki, "Spectral Structure of Intermittent Chaos" (to be published in Physica D)

2 次元ポアンカレー写像のスペクトル

九大・理　森　　肇，森田照光，泰　浩起，堀田武彦

カオスの確率論を決定論（的運動方程式）から具体的に作れるかどうかは

1) 適当な粗視化を行ない，
2) 粗視変数の状態空間において，カオスの不変確率密度を定常解としてもつ，統計物理的発展方程式を作れる，

かどうかにかかっていると思える。ここで，統計物理的発展方程式とは，熱平衡分布を定常解としてもつ，ボルツマン方程式やフォッカープランク方程式に相当するもので，その特徴は，時間推進が平均化の演算子であり，逆行不可能なものを意味する。

カオスの理論でよく登場する，逆行不能（noninvertible）な2対1の一次元写像のFP演算子（Frobenius-Perron 演算子）は，そのような平均化の演算子である。しかし，ポアンカレー写像は，力学方程式の解の一意性により1対1の変換であり，逆行可能である。ポアアカレー写像は，力学系の，相空間における軌道の横断面上のプロットであるから，そこに概念上の因難はない。そこで，2対1の一次元写像，または，それを拡張した統計物理的発展方程式を，1対1のポアンカレー写像から出せるかどうかを考えよう。

簡単のため，Hénon の2次元散逸写像や散逸標準写像のような，散逸力学系の2次元ポアンカレー写像を考える。その標準形を

$$x_{t+1} = F_1(x_t,\ y_t) = f(x_t) + bp(x_t,\ y_t)$$

$$y_{t+1} = F_2(x_t,\ y_t) = g(x_t) + bq(x_t,\ y_t)$$

としよう。bは，散逸系の体積縮小パラメターで，$b \to 0$のとき，変換のヤコビアンは0に近づく。この極現では2対1の一次元写像 $x_{t+1} = f(x_t)$ が得られるが，この極限は特異的であり，問題は，$b \neq 0$のとき統計物理的発展方程式を求めることである。粗視化は，どんな物理量に着目するかに依存する。ここでは，x_tの関数の時間相関関数

$$C_t \equiv \iint \mathrm{d}x_0\, \mathrm{d}y_0\, \hat{A}(x_t)\, \hat{B}(x_0)\, D^*(x_0,\ y_0)$$

を考えよう。$D^*(x,\ y)$は不変確率密度で，$\hat{A}$はAからその長時間平均値を差引いたものである。これは，単なる変形により

$$C_t = \int \mathrm{d}x\, \hat{A}(x)\, P_t(x) \tag{1}$$

とかける。$P^*(x) \equiv \int \mathrm{d}y D^*(x,\ y)$とすれば，$P_0(x) = [1 + \hat{B}(x)]\, P^*(x)$となり，問題は，$P_t$の発展方程式を求めることである。こま，$\varphi(y/x) \equiv D^*(x,\ y)\,/\,P^*(x)$として，投影演算子

$$\mathscr{P} G(x,\ y) \equiv \varphi(y/x) \int \mathrm{d}y'\, G(x,\ y') \tag{2}$$

を導入すれば，投影演算子法により

$$P_{t+1}(x) = \sum_{s=0}^{t} M_s P_{t-s}(x) \tag{3}$$

が得られる。ここで，M_sは線形演算子

$$M_s G(x) \equiv \int \mathrm{d}y \mathscr{L}(Q\mathscr{L})^s \varphi(y/x) G(x) \tag{4}$$

である。ここで，$\mathscr{L}$は力学の時間発展演算子

$$\mathscr{L}G(x,\ y) \equiv \iint \mathrm{d}x'\mathrm{d}y' \delta(x - F_1(x',\ y'))\delta(y - F_2(x',\ y'))\, G(x',\ y') \tag{5}$$

で，$Q \equiv 1 - \mathscr{P}$である。

パワースペクトルは，(1)のフーリエ変換

$$\begin{aligned} S(\omega) &\equiv C_0 + 2\sum_{t=1}^{\infty} C_t \cos(\omega t), \\ &= \int \mathrm{d}x \hat{A}(x)\, U(\omega)\, \hat{B}(x)\, P^*(x) + \text{c.c.} \end{aligned} \tag{6}$$

によって与えられる。ここで，$U(\omega)$は

$$U(\omega) \equiv \frac{1}{1 - \exp(-\mathrm{i}\,\omega)\, M(\omega)} - \frac{1}{2}, \tag{7}$$

$$M(\omega) \equiv \sum_{s=0}^{\infty} M_s \exp(-\mathrm{i}\,\omega s) \tag{8}$$

である。したがって，$P^*(x)$と$M(\omega)$が具体的に求まれば2，2次元ポアンカレー写像のパワースペクトルと時間相関関数が計算できることになる。

M(ω)は，一次元写像$x_{t+1} = f(x_t)$のFP演算子$\mathscr{M}$を拡張した統計物理的発展演算子である。実際，(4)をbの巾級数に展開すれば，s次の記憶演算子M_sは$O(b^s)$であり，M_0の0次の項は$\mathscr{M}$となる。xのattracting領域Ωにおける直交関数系$\Psi_l(x)$を使って

$$\hat{B}(x)\, P^*(x) = \sum\nolimits_l' b_l \Psi_l(x) \tag{9}$$

と展開すれば，$S(\omega) = \sum\nolimits_l' S_l(\omega)$,

$$S_l(\omega) \simeq B_l \left[\frac{1}{1 - e^{-\mathrm{i}\omega} < M(\omega) >_l} - \frac{1}{2}\right] + \text{c.c.},$$

$$< M(\omega) >_l \equiv \frac{\int \mathrm{d}x\, \hat{A}(x)\, M(\omega)\, \Psi_l(x)}{\int \mathrm{d}x\, \hat{A}(x)\, \Psi_l(x)} \tag{10}$$

と近似できよう。$\Psi_l(x)$は，$\mathscr{M}$の定義域Ω_0では，$\mathscr{M}$の固有関数になるものとする。$b = 0$のとき，$< M(\omega) >_l$は$\mathscr{M}$の固有値ν_lに一致し，$S_l(\omega)$は一次元写像のパワースペクトルと一致する。

$P^*(x)$と$< M(\omega) >_l$の計算法をLozi写像について確立し，Hénon写像と散逸標準写像のパワースペクトルを求め，2次元性の特徴や臨界現象の1次元性を解明したい。