

IV. 参考文献

- 1) T. Ishikawa and T. Yukawa, KEK preprint KEK=TH 109.
- 2) F. J. Dyson, J. Math. Phys. 3 (1962) 1191.
- 3) P. Pechukas, Phys. Rev. Lett. 51 (1983) 943.
- 4) T. Yukawa, Phys. Rev. Lett. 54 (1985) 1883.
- 5) N. S. Krylov, Foundation of Statistical Mechanics, Princeton, 1979.
- 6) Ya. G. Sinai and K. L. Volkoviiski, Funct. Anal. Appl. 5 (1971) 185.

強制非線型振動子における周期的カオスのスペクトル構造

九大・理 富田浩治, 吉田 健

周期倍化分岐をへて発生するカオスは、その発生過程の普遍性に対応して、少なくともその直後においては、普遍的構造を持つであろう。分岐でみれば、制御パラメーターをカオス側から発生点へ向けて変化させると、アトラクターが次々に2つに分裂する分岐の主系列がある。このようなカオスを周期的カオスと呼ぶ。周期的カオスでは、非周期軌道の相関関数のパワースペクトルは、分裂した 2^m 個のアトラクターを一定の順序で動きまわることによる周期成分（線スペクトル）と、アトラクター内で二度と同じ点には来ないことによるカオス成分（連続スペクトル）とから成る。

いま、一次元写像系を考え、その写像関数を $f(x)$ とする。アトラクターが 2^m 個に分裂する分岐点を a_m と書く。 $a = a_{m-1}$ での $f(x)$ と $a = a_m$ での $f(x)$ の2回写像 $f^2(x)$ との相似性に着目すれば、 $a = a_m$ でのスペクトルの各成分と $a = a_{m-1}$ での対応するスペクトルとを関係づける漸化式が求まる¹⁾。図を描いてみればすぐわかるように、上記の相似について、2個の相対比がある。それを α_1 , α_2 と書き、スケール因子と呼ぶ。テント写像

$$f(x) = \begin{cases} ax & [0 \leq x \leq b/(a+b)] \\ b(1-x) & [b/(a+b) < x \leq 1] \end{cases}$$

では、

$$\alpha_1 = a(b+1)/(a-1), \quad \alpha_2 = -a(b+1)/b(a-1)$$

となって、漸化式は厳密に成り立つ。Logistic map $f(x) = ax(1-x)$ のように極大付近が2次式で表わされる写像の場合は、 $\alpha_1 = \alpha^2$, $\alpha_2 = -\alpha$ (但し、 α は Feigenbaum のスケール因子) にとり、また、他のクラスの一峰写像では対応する適当な α_1 , α_2 をとれば、漸化式は臨界点に向って漸近的に成立している²⁾

この漸化式は上述のように一次元写像に対して導かれたものであるが、その性格からみて、連続時間の系が示す周期的カオスに対しても Poincaré 写像をとれば成り立っているのではないかと予想される。そこで今回は、強制非線型振動子の周期的カオスについて調べた。

強制振動子の運動方程式

$$\frac{d^2X}{dt^2} + R \frac{dX}{dt} + V(X) = F(X, t)$$

において、 $V(X) = \omega_0^2 X$, $F(X, t) \propto X^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ とすると、Henon 写像

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 + y_n - ax_n^2 \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases} \quad (1)$$

に等価な二次元写像を得る。 $V(X) = \sin X$, $F(X, t) = a \cos 2\pi\omega t$ とすると、強制振動子の式

$$\frac{d^2X}{dt^2} + R \frac{dX}{dt} + \sin X = a \cos 2\pi\omega t \quad (2)$$

となる。 $a-\omega$ 面の相図は文献3)にある。

(1)の Henon 写像で、 b を固定して a を変化させると、周期倍化過程とアトラクター分裂過程の分岐の主系列が現われる。この分岐列に対してスケール因子を $\alpha_1 = \alpha^2$, $\alpha_2 = -\alpha$ にとり上述の漸化式を適用してみた。今の場合、 $\langle y_n y_0 \rangle = b^2 \langle x_n x_0 \rangle$ なる関係があるから、 x 成分の相関関数 $\langle x_n x_0 \rangle$ のスペクトルについてだけ行えばよい。 $b = 0.3$ にとり、 $a = a_3$ で数値的に求めたスペクトルから出発して、 $a_3 \rightarrow a_4 \rightarrow a_5$ と漸化式を使って求めたスペクトルを、それぞれの点 a_4 , a_5 で直接数値的に求めたスペクトルと重ねて図1に示してある。但し、周期成分を表わす線スペクトルの位置は、比較し易いように少しずらしてある。

(2)の連続時間系の振り子に対しては、 $t = (n/\omega) + \Delta t$ ($n = 1, 2, \dots$) となる時刻のところで Poincaré 写像をとり、その写像の X 成分の相関関数 $\langle x_t x_0 \rangle$ と $\dot{X} \equiv dX/dt$ 成分の相関関数 $\langle \dot{x}_t \dot{x}_0 \rangle$ のスペクトルについて $a_3 \rightarrow a_4$ の場合を調べた。図2と図3は Δt

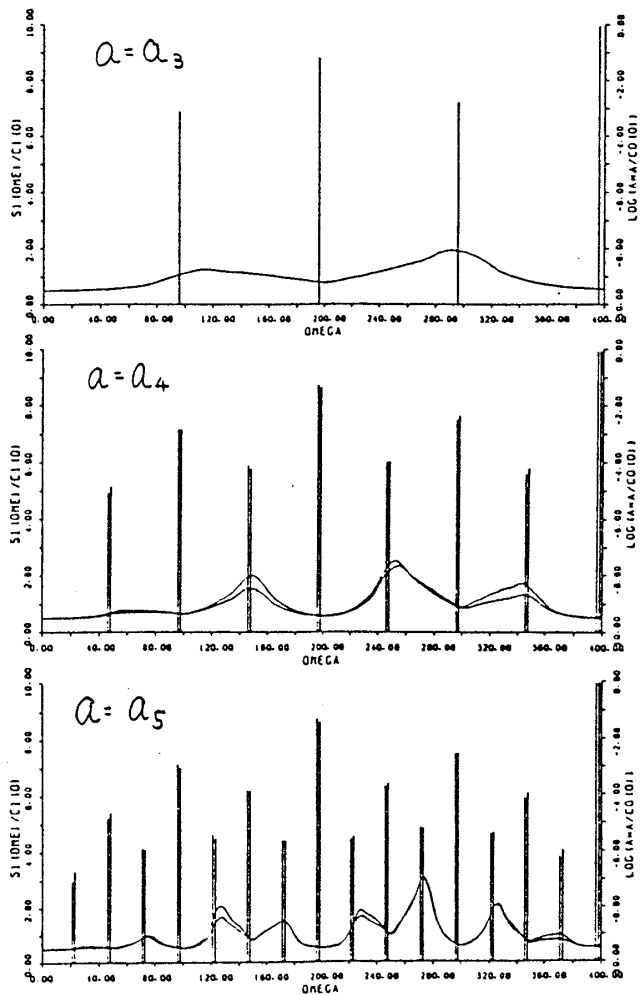


図 1

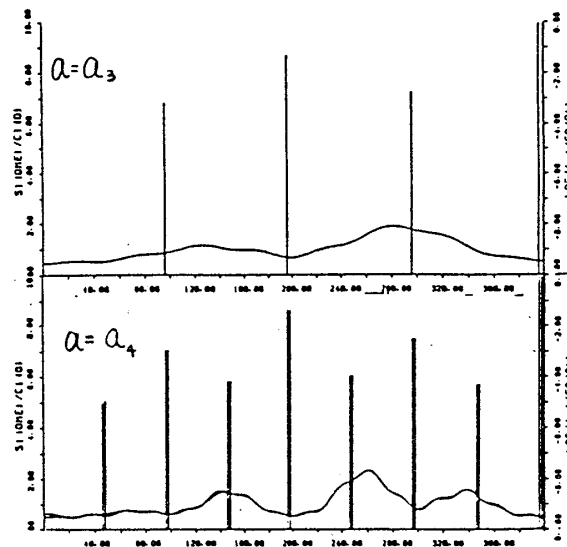


図 2

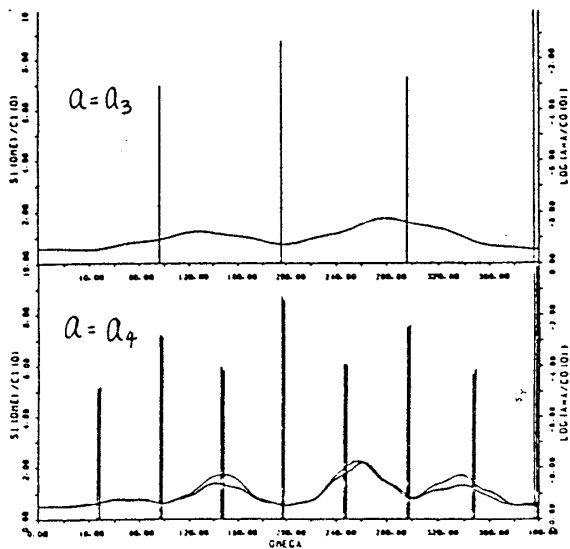


図 3

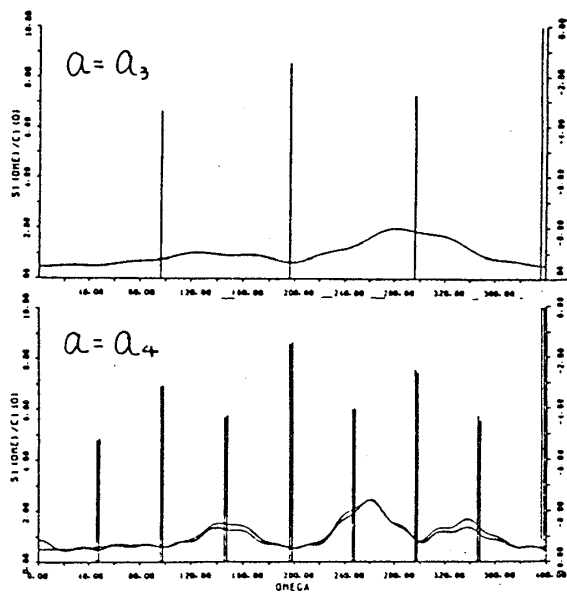


図 4

研究会報告

$= 0$ と $\Delta t = 0.8$ としたときの $\langle x_t x_0 \rangle$ のスペクトルである。つまり、違った Poincaré 断面を取っていることになる。図 4 は、 $\langle \dot{x}_t \dot{x}_0 \rangle$ の結果である。スケール因子は(1)と同じものを使った。

以上の結果は次のようにまとめられる。

- (i) 一次元写像は、noninvertible で、そのアトラクターは区間の和集合であるが、二次元写像は invertible でアトラクターは Cantor 構造をもつ。このような違いがあるにもかかわらず、周期的カオスのスペクトルは同じスケール因子 α をもつ同じ漸化式でよく記述される。
- (ii) 連続時間系の Poincaré 写像では、Poincaré 断面の位置（今の場合は時刻）によらず、そのスペクトルは、同じ漸化式で表現できる。
- (iii) Poincaré 写像では $x-x$ のスペクトルにも、 $\dot{x}-\dot{x}$ のスペクトルにも同一の漸化式が成立する。

こうして、一次元写像系について得られたスペクトルに対する漸化式は、周期的カオスについて一般的であると推論してよいであろう。

参考文献

- 1) T. Yoshida, Prog. Theor. Phys. 73 (1985), 349.
- 2) 吉田健, 物性研究 44 (1985), 337.
- 3) A. H. MacDonald and M. Plischke, Phys. Rev. B27 (1983), 201.

間欠的カオスのスペクトル構造

九大・理 徐 丙鉄, 森 肇

サドル・ノード分岐によって発生する間欠的カオス (Type I) のスペクトル構造について述べる。

Type I の間欠的カオスはポアンカレ写像をとると、

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n^2 + \frac{1}{4} + \varepsilon, & (0 \leq x_n \leq D) \\ \frac{1-b}{1-D}(1-x_n) + b, & (D < x_n \leq 1) \end{cases} \quad (1)$$