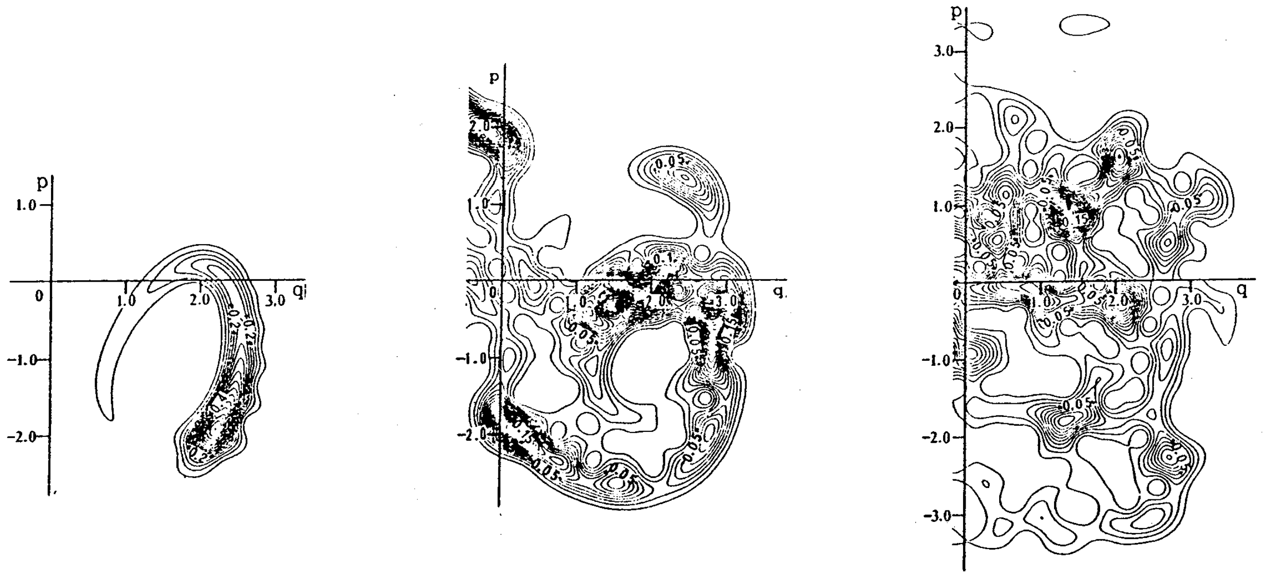

図 3. カオス状態の伏見関数の時間発展点対称なので左部をカット
(a) $t=T$ (b) $t=2T$ (c) $t=10T$

極小波束が最も安定な波束であることがわかる。したがって時間発展の中で干渉効果によって小さな波束が現われた場合，極小波束に近い波束が最も安定で長く生き残る。

量子リャプノフ数

京大・理　戸田幹人
京大・基研　池田研介

古典系でカオスを特徴づけるのはリャプノフ数である。量子系で対応する量を定義する試みを紹介する。

まず量子系で位相空間を導入する。ここではコヒーレント状態を用いて次のように定義する。

$$Q(\vec{p}, \vec{q}, t) \equiv \langle \vec{p}, \vec{q} \mid \rho(t) \mid \vec{p}, \vec{q} \rangle$$

$\rho(t) \equiv |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$ は密度行列，$|\vec{p}, \vec{q}\rangle$ コヒーレント状態である。

初期状態として $\vec{p}_0$ $\vec{q}_0$ のまわりに局在した波束 $|\vec{p}_0, \vec{q}_0\rangle$ を取り，時間発展によってその形がどのように変わっていくかを考える。そのために $Q(\vec{p}, \vec{q}, t)=\omega(t)$ を満たす等高線 $\Sigma(t)$ を考えよう。ここで各時刻での等高線 $\Sigma(t)$ は，内部の確率 P が保存するように選ぶ。

$$\int_{Q(\vec{p}, \vec{q}, t) \geqq \omega(t)} Q(\vec{p}, \vec{q}, t) \frac{d\vec{p}\, d\vec{q}}{\pi} = P$$

古典論での時間発展では位相空間の確率分布は Liouville 方程式に従う。その時の等高線の周長はリャプノフ数を $\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \cdots \geqq \alpha_{2n-1}$（$n$は自由度の数）とすると

$$l(t) \sim \exp\left(\sum_{j=1}^{2n-2} \alpha_j t\right) = \exp(-\alpha_{2n-1} t) = \exp \alpha_1 t$$

の形で変化する。ただし$\sum_{j=1}^{2n-1} \alpha_j = 0$，$\alpha_j = -\alpha_{2n-j}$の関係を用いた。従って最下リャプノフ数$\alpha_1$は$\alpha_1 \sim \log S(t)/t$から評価できる。

以上の方法を量子論の場合に適用する。もし$Q(\vec{p}, \vec{q}, t)$の等高線$\Sigma(t)$の周長が指数関数的に変化する場合には，量子リャプノフ数α_qは

$$\alpha_q \sim \log l(t)/t$$

によって定義できるであろう。

我々は具体的な系として次の２つの系に対して量子リャプノフ数を計算した。１つは，２次元トーラス上の写像であるアーノルドの猫の量子系である。もう１つは Double Resonance である。

アーノルドの猫で量子リャプノフ数を計算すると古典論での値と良く一致する。ただし量子論で指数関数的な伸びが見られるのは有限時間t_cの間のみであり，

$$t_c \sim \log \hbar^{-1}/\alpha_1$$

である。t_cは次のようにして決まる。初期状態の波束の等高線の周長は$\sqrt{\hbar}$の程度である。これが指数関数的に伸ばされて$\sqrt{\hbar}\exp \alpha_1 t$となる。波束は伸ばされると同時に折り畳まれるが，折り畳まれた各部分の間融$d(t)$は平均として

$$1 \sim d(t)\sqrt{\hbar}\exp\ \alpha_1 t$$

である。ここで左辺は折り畳みの起こる面積であり，アーノルドの猫の場合には全位相空間である。t_cは$d(t)$が量子論のの位相空間での不確定性$\sqrt{\hbar}$に到った時と考えられる。

アーノルドの猫の量子論では時刻t_cまでは量子古典対応が良く成立し，時刻t_cに至って量子効果がリャプノフ数に現われた。上に述べたt_cを評価する式では，折り畳みが一様である事を利用している。従って，リャプノフ数に量子効果が見える様子は，折り畳みが一様でない時には違ってくる。

そのような具体例として Double Resonance がある。この系では位相空間でリャプノフ数が一定ではない。また折り畳みは位相空間の各部分で起こり，その空間的・時間的スケール

も異なる。折り畳みが不確定性より粗い所では波束は古典系の軌道に沿って運動し，引き伸ばされるであろう。ここでは量子系のリャプノフ数は古典系のそれと等しいであろう。それに対して折り畳みが不確定性より細かい所ではリャプノフ数への寄与はない。その結果平均として量子リャプノフ数は古典系のそれより小さな値となる。

現実の系ではカオスの構造は一様ではない。従って古典系におけるカオスが量子系に直ちに反映するとは限らない。量子リャプノフ数で，量子系でのカオスの強さを定量化できる。

レベルの統計理論とその問題点

KEK　湯　川　哲　之

I. レベルの統計

孤立系の量子スペクトルの統計的性質は，原子核の中性子レゾナンスレベルのほかに，最近では原子や分子の吸収線，２次元ポテンシャル問題の固有値等に於いても研究されている。これらの研究をとうしてレベル密度のような大域的性質は，系のハミルトニアンに強く依存するが，レベル間隔分布のような局所的性質は，ハミルトニアンにあまりよらないユニバーサリティの存在する事が分かって来た。

レベル間隔分布は，Brody 分布

$$P_0(S) = \text{const.} * S^{\nu} \exp(-aS^{\nu+1})$$

で現象論的にパラメトライズされるが，原子核や原子分子のような複雑な系では$\nu=1$，即ち Wigner 分布で良くデータを再現する。又，２次元ポテンシャル系のような自由度の小さい場合には，ν は古典軌道のストカスティックな度合い，例えば KS エントロピーなどと相関のあることが数値計算により得られている〔1〕。Wigner 分布を説明するような理論としては，以前から Ranndom Matrix Theory 中でもガウス型直交行列アンサンブル模型がその使いやすさ（数値的な意味で）から，多く研究がなされて来た。しかしアンサンブルの物理的意味や，与えられたハミルトニアンに対して適当なアンサンブルを選ぶ原理等，基本的なことは余り釈然とはしていない。