

(大きい)と外から与えられる擾動場, 又は, 温度の上昇によって容易に励起される(されない)。もし, 系が多く構造をとり得るときには, より大きい $\tilde{d}$ をもつような構造配置を好み, 最終的には, 許される最大の $\tilde{d}$ を与える構造配置で安定化する。実際, 多粒子系は, 最大の $\tilde{d}$ を与える周期構造で最も安定である。このことを物理的に言えば,  $\tilde{d} < d$  (空間の次元数)なるフラクタル結晶は, 準安定状態, 又は, 非平衡状態で実現されるという結論を得る。

(追記) 講演は, 他の表題で行ないましたが, より適当と思われるものに変更したことを記す。

### 参考文献 (一般)

- 1) K. Shinjo and T. Sasada, J. Phys. C 18 (1985) L261 ~
- 2) K. Shinjo and T. Sasada, (preprint) (1985)
- 3) K. Shinjo, T. Sasada and S. Sugano, Phys. Rev. B (1986)
- 4) K. Shinjo and T. Sasada, 投稿準備中
- 5) S. Aubry, J. Physique 44 (1983) 147 ~
- 6) D. Ruelle, Physica 7D (1983) 40 ~

## 量子カオスと伏見関数

早大・理工 高橋 公也

量子力学的なカオスを考える場合, 古典力学との対応を無視することはできない。伏見関数は粗視化の効果により古典力学と非常によい対応を示す。ここでは, 伏見表示における量子力学の簡単な紹介を行ない。固有状態と時間発展における伏見関数の特長について議論する。

伏見関数は, 波動関数 $\psi$ から極小波束 $\phi_{\vec{q}\vec{p}}$ への遷移確率に $(2\pi\hbar)^{-N}$  ( $N$ は自由度)を掛けたものである。

$$\rho_H = (2\pi\hbar)^{-N} |\langle \phi_{\vec{q}\vec{p}} | \psi \rangle|^2 \quad (\Delta q)^2 = (\Delta p)^2 = \frac{\hbar}{2}$$

さらに, 伏見表示の力学量を, 次のように定義する。

$$A_H = \langle \phi_{\vec{q}\vec{p}} | \hat{A} | \phi_{\vec{p}\vec{q}} \rangle$$

その時、力学量の積は、次のようになる。

$$(AB)_H = A_H \exp\left(\sum_{i=1}^N \frac{\hbar}{2} \left( \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q_i} - i \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p_i} \right) \left( \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q_i} + i \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p_i} \right) \right) B_H$$

したがって、伏見表示の交換関係は、

$$((i\hbar)^{-1} [\hat{A}, \hat{B}])_H = \frac{2}{\hbar} \text{Im}(AB)_H$$

となる。伏見表示の時間発展の方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_H = ((i\hbar)^{-1} [\hat{H}, \hat{\rho}])_H = \frac{2}{\hbar} \text{Im}(H\rho)_H \quad (\rho = |\psi\rangle\langle\psi|)$$

$$\sim \sum_{i=1}^N \left( \frac{p_i}{m_i} \frac{\partial \rho_H}{\partial q_i} + \frac{\partial V_H}{\partial q_i} \right) + O(\hbar)$$

第一項が古典的なリウビル方程式と同じ形になるのがわかる。さらに伏見表示の固有方程式は、次のようになる。

$$E\rho_H = (H\rho)_H \Leftrightarrow \text{Re}(H\rho_H) = E\rho_H, \quad \text{Im}(H\rho_H) = 0$$

この方程式の実部は、固有値に関する方程式で、虚部が定常状態を示す。

次に、積分系における固有状態について述べる。簡単のために一次元で話しを行なう。古典的な極限で  $\rho_H$  は  $H_H \sim E$  の近くに局在していることを仮定し  $H_H = E$  上の一点  $(q_0, p_0)$  の近傍で近似解を考える。grad  $H_H$  方向の座標を  $\xi$  としそれと直交する座標を  $\eta$  とする。

$(q_0, p_0) \rightarrow (\xi_0, \eta_0)$  と変換されるとすると近似解は、

$$\rho_H \sim C |\text{grad } H_H|^{-1} (\pi\hbar)^{-\frac{1}{2}} \exp - \frac{(\xi - \xi_0)^2}{\hbar}$$

( $C$  は規格化によって決まる定数)

となる。多自由度の積分系でも、同様にトーラスの近くにガウス分布することが容易に示される。具体的な例として次のような一次元系、

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4} x^4 \quad (m=1, \hbar=0.08)$$

における 21 番目の固有状態 ( $E_{21} \sim 2.2256797$ ) を図 1 に示す。近似解で示されるように  $H_H = E$  の回りにガウス分布しているのがわかる。

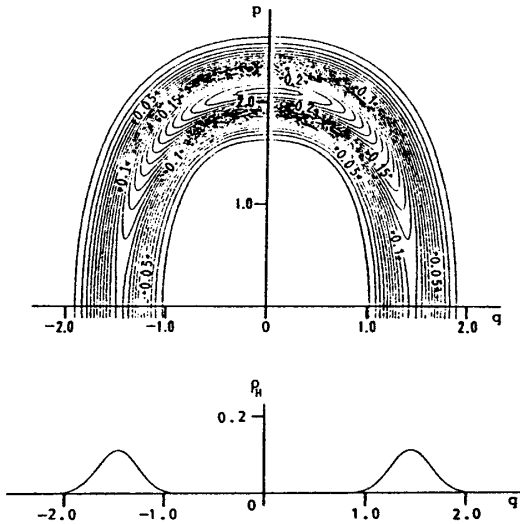


図1. 固有状態の伏見関数, 点対称なので下部をカット,  $p = 0$  の断面図をそえる。

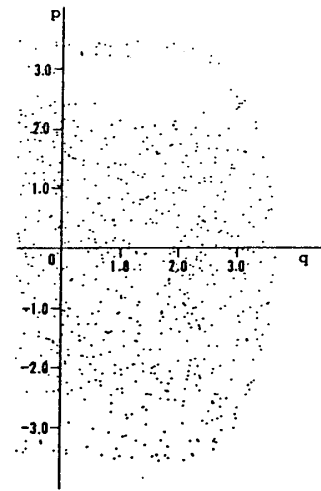


図2. カオス状態の古典的ストロボマップ点対称なので左部をカット

最後に, 波束の時間発展について述べる。具体的な系として一次元系に周期外力を加えた場合について示す。

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4} (1 + a \sin \omega t) x^4 \quad (m=1, a=0.4, \omega=0.7, \hbar=0.08)$$

古典的なストロボマップを図2に示す。原点の回りに大きなカオス領域が広がっているのがわかる。初期波束として原点に中心をもつ極小波束

$$\rho_H(q, p, 0) = (2\pi\hbar)^{-1} \exp\left(-\frac{q^2}{2\hbar} - \frac{p^2}{2\hbar}\right)$$

を選んで時間発展を調べた。図3, (a), (b), (c)に,  $t = T, 2T, 10T$  ( $T$ は外力の周期) の  $\rho_H$  の分布を示す。古典的なホモクリニックな構造を反映して複雑に折れたたまり, 干渉しながら時間発展し古典的なカオス領域全体に広がって行くのがわかる。この時間発展において量子的な干渉効果により, 古典的な均一な分布とは異なり不均一な, 小さな波束の集まりになっている。このような波束は極小波束に近い波束になっている。そこでガウス分布

$$\rho_H = (2\pi\beta\hbar)^{-1} \exp\left(-\frac{(q - \langle q \rangle)^2}{\beta\hbar} - \frac{(p - \langle p \rangle)^2}{\beta\hbar}\right) \quad (\beta \geq 2)$$

の時間発展の近似計算をおこなうと,

$$\frac{\partial \rho_H}{\partial t} = \frac{(p - \frac{1}{\beta}(\langle p \rangle - p))}{m} \frac{\partial \rho_H}{\partial q} - \frac{\partial V_H}{\partial q'} - \frac{\partial V_H}{\partial q'} \Big|_{q'=q+\frac{1}{\beta}(\langle q \rangle - q)} \frac{\partial \rho_H}{\partial p} + O(\sqrt{\hbar})$$

となり,  $\beta$ が小さいほど, 同じ分布を持った古典的な確率密度より崩れにくいことがわかり,

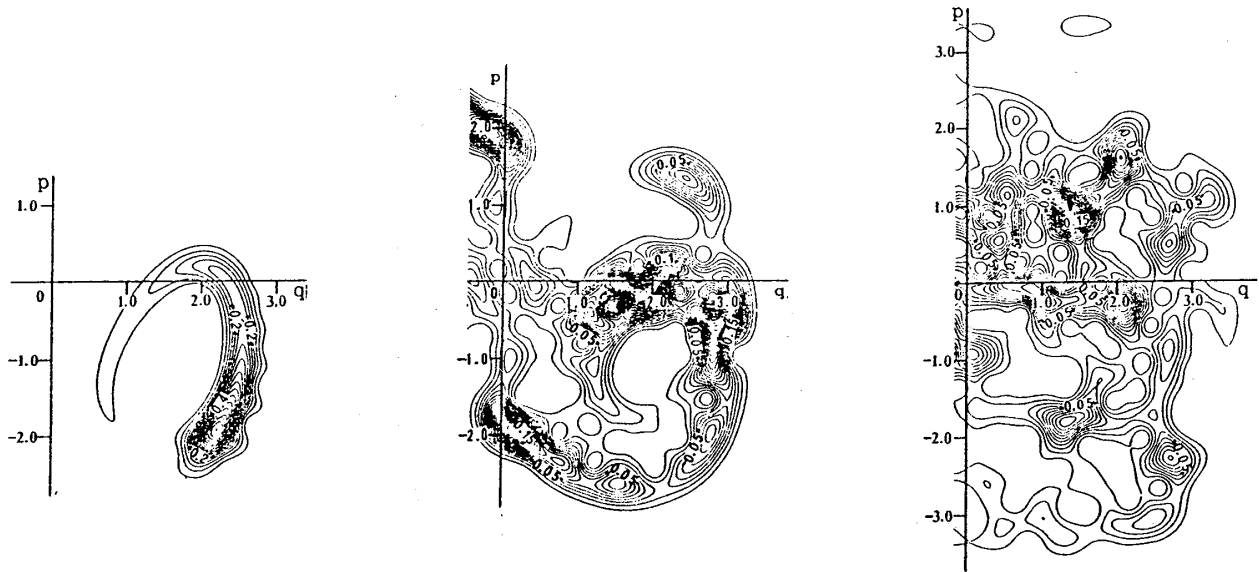


図3. カオス状態の伏見関数の時間発展点対称なので左部をカット  
 (a)  $t = T$  (b)  $t = 2T$  (c)  $t = 10T$

極小波束が最も安定な波束であることがわかる。したがって時間発展の中で干渉効果によって小さな波束が現われた場合、極小波束に近い波束が最も安定で長く生き残る。

### 量子リャプノフ数

京大・理 戸田 幹人  
 京大・基研 池田 研介

古典系でカオスを特徴づけるのはリャプノフ数である。量子系で対応する量を定義する試みを紹介する。

まず量子系で位相空間を導入する。ここではコヒーレント状態を用いて次のように定義する。

$$Q(\vec{p}, \vec{q}, t) \equiv \langle \vec{p}, \vec{q} | \rho(t) | \vec{p}, \vec{q} \rangle$$

$\rho(t) \equiv |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$  は密度行列,  $|\vec{p}, \vec{q}\rangle$  コヒーレント状態である。

初期状態として  $\vec{p}_0, \vec{q}_0$  のまわりに局在した波束  $|\vec{p}_0, \vec{q}_0\rangle$  を取り、時間発展によってその形がどのように変わっていくかを考える。そのために  $Q(\vec{p}, \vec{q}, t) = \omega(t)$  を満たす等高線  $\Sigma(t)$  を考えよう。ここで各時刻での等高線  $\Sigma(t)$  は、内部の確率  $P$  が保存するように選ぶ。

$$\int_{Q(\vec{p}, \vec{q}, t) \geq \omega(t)} Q(\vec{p}, \vec{q}, t) \frac{d\vec{p}d\vec{q}}{\pi} = P$$