エントロピ，悪魔の階段，中間構造及びフラクタル結晶

NTT 基礎研　新　上　和　正

相互作用する多粒子系のとり得る結晶構造の問題は，凝縮系物理における最も基本的なものの一つである。ここでは，この問題を考える。[1)~4)] 話を一般的にすると解らなくなるので，特定な系をとり，粒子構造を詳しく調べることから始める。

次の様なモデルを考える。粒子は，１次元的に配列し，その位置座標は整数値のみをとり，２体力 $J(x)$ で相互作用するとする。$J(x)$ に次の性質を課すことにする。（結論は，$J(x)$ の形に依らない）(i) $x \leqq N_R - 1$（N_R：相互作用到達距離）で，$J(x) > 0$（斥力），かつ，$J''(x) > 0$（凸性），(ii) $x \geqq N_R$ で，$J(x) = 0$。このとき答えるべき問題は，「N_R，c（粒子密度）を与えたとき，エネルギを最低にする粒子配置はどの様なものであるか」である。

結果は，有限の N_R で，c の値に応じて，周期構造と有限エントロピを持つ乱れた構造が現われる。無限に大きい N_R で，全有理数 c で周期構造，又，全無理数 c で準周期構造が現われる。伴に，結晶構造は一意的に決まり，エントロピは０である。結果をまとめると，

(1)　周期構造　（$W = 1$）

(2)　準周期構造　（$W = 1$）

(3)　乱れた構造　（$W \sim e^{\alpha N}$）

ここで，括弧の中に，結晶構造の状態数 W の粒子総数 N の依存性を示した。エントロピ S は $S = \lim_{N\ \infty} \ln W/N$ で定義される。エントロピは，(1)，(2)で $S = 0$，(3)で $S = \alpha$（有限）となる。図１に，$N_R = 50$ のときの S の c 依存性を示してある。N_R をさらに増大させると，S の c 依存性はさらに複雑になる。$N_R = \infty$ で，全有理数 c で周期構造が現われることは，別の言葉で言えば，悪魔の階段が完成することを意味する。(3)の乱れた構造は，物理的には，Ruelle[5)] や Aubry[6)] のいう“turbulent crystal”や“chaotic structure”と等価なものである。

さて，これ迄，ある特定のモデルでの粒子構造を調べてきたが，他の系では，(1)，(2)，(3)とは違った結晶構造が現われないかという疑問が残る。これに答えるには，(1)，(2)，(3)で与えた構造の状態数 W をもっとよく調べる必要がある。(1)，(2)は，$W = 1$ で有限。一方，(3)は，$W \sim e^{\alpha N}$ で N の増大と伴に発散する。W のこの関数形は，系を多くの要素から成ると考えると，$W \sim \prod_i W_i$（W_i は要素 i の状態数）となり，各要素は互いに統計的に独立であ

ることを保証する。これらのことを考えると，(A) N の増大と伴に W は発散するが（構造の非決定性），(B) 統計的独立性が保証されない結晶構造の存在を考えることができる。この結晶構造を，ここで，

(4)　中間構造（marginal structure）

と呼ぶことにする。(4)は，(1)，(2)程には周期的でなく，(3)程には乱れていない結晶構造である。構造の非決定性と要素の統計的独立性のないのが特徴である。中間構造のエントロピは0である。多くの中間構造があるが，その中で最も興味深いのは，状態数 $W \sim N^{\alpha}$ となるものである。この場合，系の各要素のもつ構造の非決定さは，もとの系の構造の非決定さと同じである。ここに，構造非決定さの自己相似性が現われる。

この中間構造の1つの具体例は，2次元空間上に構成することができる。図2で，粒子は●で示してある。粒子構造は，非周期的であり，$W \sim N^{\alpha}$（$\alpha = \ln 2 / \ln 3$）である。

これ迄，多粒子系の結晶構造に少なくとも4種類あることを述べた。しかし，これらはいずれも構造の静的な側面だけであり，実際には，その安定性を論じる必要性がある。このためには，結晶の励起状態の知識，つまり，動的側面を考える必要がある。

結晶構造に依存して，低エネルギの格子振動状態密度は $\rho(\omega) \sim \omega^{\tilde{d}-1}$ を持つ。$\tilde{d}$ は，スペクトル次元と呼ばれる。もし，周期構造であれば，$\tilde{d}$ は空間の次元数 d に等しい。一般には，$\tilde{d}$ は半端な整数をとる。(2)，(3)，(4)は，一般に半端な整数をとると考えられる。逆に，上記の様な励起スペクトルをもつものを，総称して，フラクタル結晶と呼ぶことにする。このとき，フラクタル結晶の安定性は，$\tilde{d}$ と深く結びついてくる。$\tilde{d}$ の定義から，$\tilde{d}$ が小さい

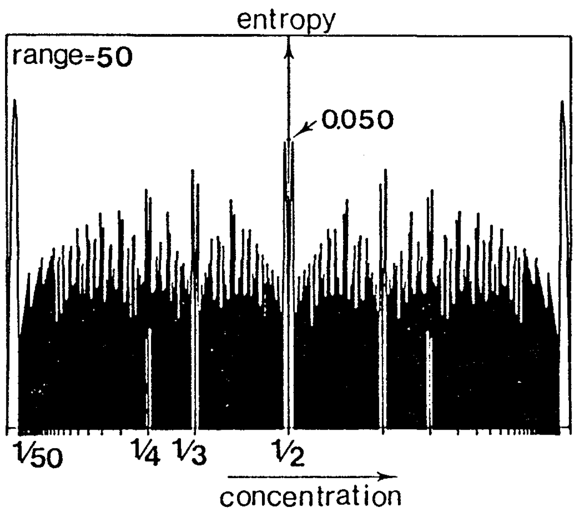

図1

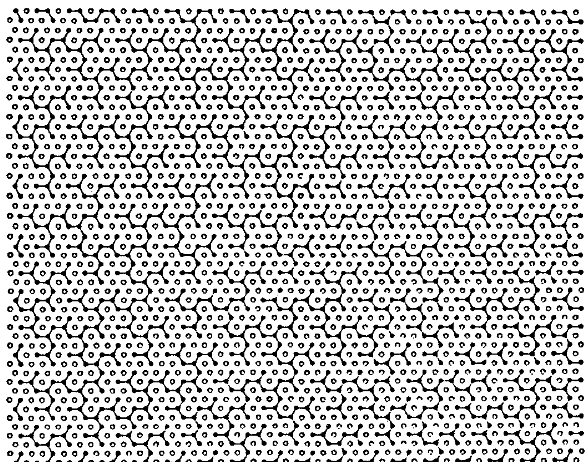

図2

（大きい）と外から与えられる摂動場，又は，温度の上昇によって容易に励起される（されない）。もし，系が多くの構造をとり得るときには，より大きい$\tilde{d}$をもつような構造配置を好み，最終的には，許される最大の$\tilde{d}$を与える構造配置で安定化する。実際，多粒子系は，最大の$\tilde{d}$を与える周期構造で最も安定である。このことを物理的に言えば，$\tilde{d}<d$（空間の次元数）なるフラクタル結晶は，準安定状態，又は，非平衡状態で実現されるという結論を得る。

（追記） 講演は，他の表題で行ないましたが，より適当と思われるものに変更したことを記す。

参考文献（一般）

1) K. Shinjo and T. Sasada, J. Phys. **C 18** (1985) L261～
2) K. Shinjo and T. Sasada, (preprint) (1985)
3) K. Shinjo, T. Sasada and S. Sugano, Phys. Rev. **B** (1986)
4) K. Shinjo and T. Sasada, 投稿準備中
5) S. Aubry, J. Physique **44** (1983) 147～
6) D. Ruelle, Physica **7D** (1983) 40～

量子カオスと伏見関数

早大・理工　高 橋 公 也

量子力学的なカオスを考える場合，古典力学との対応を無視することはできない。伏見関数は粗視化の効果により古典力学と非常によい対応を示す。ここでは，伏見表示における量子力学の簡単な紹介を行ない。固有状態と時間発展における伏見関数の特長について議論する。

伏見関数は，波動関数ψから極小波束$\phi_{\vec{q}\vec{p}}$への遷移確率に$(2\pi\hbar)^{-N}$（Nは自由度）を掛けたものである。

$$\rho_{\mathrm{H}}=(2\pi\hbar)^{-N}|<\phi_{\vec{q}\vec{p}}|\psi>|^2 \qquad (\Delta q)^2=(\Delta p)^2=\frac{\hbar}{2}$$

さらに，伏見表示の力学量を，次のように定義する。