$$\Delta\nu(m_0, \eta) = \tanh(\eta)\ \{\ 2f - a + \frac{2br}{5} + (\ a - 2f - \frac{3c}{2})\ m_0\ \}/3\sqrt{b}\,(1-m_0)^{\frac{3}{2}}$$

任意の初期条件から出発し，各領域での解がその領域の境界まできたら，次の領域の解に接続することによって解の長時間の振舞いを調らべることができる。

まとめ

(1) 3次元 $(x,\ p=\dot{x},\ m)$ の問題が，$(\nu,\ m_0)$ の2次元の問題に縮約できた。

(2) カオスの確率的性格は領域(Ⅲ)の解から出る。特に ν の飛び $\Delta\nu$ が無視できる場合には，解は regular な振舞いを示す。飛び $\Delta\nu$ の初期値に関する平均は0となる。この飛び $\Delta\nu$ がカオスの決定論的側面と確率的側面を調和させ，カオスの統計的性質やカオスへの分岐のし方を決定することが示された。

(3) 系(1)のシミュレーションの結果と理論の結果が，分岐ダイヤグラムとポアンカレマップについて比較され，定性的にも定量的にもよく一致することが示された。

(4) ローレンツ方程式や保存系への適用も議論された。

ホモクリニックカオスの長時間ふるまいと散逸効果

京大・理　　秋山真治，相沢洋二

周期外力の下での非線型振動子

$$\ddot{x} + V'(x) = F\sin 2\pi t$$

の解軌道の統計性について報告した。

ポテンシャル $V(x)$ は，$x=0$ に不安定な平衡点を持たせてとる (double minimum potential)。外力のない時，3次元相空間 $\boldsymbol{R}^2 \times T^1$ 内に不安定周期軌道

$$(\ x(t)=0,\ \ \dot{x}(t)=0,\ \ t\ ),\quad 0 \le t < 1$$

が存在することになる。外力を加えると，この周期軌道の安定多様体と不安定多様体は分離し交叉する。解の一意性から，2つの多様体の交叉点はひとつの解軌道を与える。ホモクリニック軌道と呼ばれるこの軌道の近くの軌道はカオス的ふるまいをすることがわかっている。保存

系の場合，　　　　　　　　　と呼ばれる体積がゼロでない相空間内の不変領域が上のメカニズムで形成され，その中の軌道の程んどすべてが領域内を稠密に動き回る。この領域内の一個の解軌道を数値計算し，その統計性を調べ以下の結果を得た。

1\. ポテンシャル依存性

次の４つのポテンシャルについて，$F=0.01$，初期条件 $x(0)=0$，$\dot{x}(0)=0$ の軌道（$x(t)$, $\dot{x}(t)$, $t \bmod 1$）を数値計算した。

$$
\begin{aligned}
V(x) &= \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2, \\
&\frac{1}{2}x^6 - \frac{3}{4}x^4, \\
&\frac{3}{4}x^8 - x^6, \\
&\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}.
\end{aligned}
$$

$F=0$（非摂動系）での不安定周期軌道の安定性の違いによって $F \neq 0$（摂動系）のカオス的軌道のふるまいに差異が見られるか調べたが，相関関数・パワースペクトルに定性的な差は認められなかった。これは，摂動によって周期軌道はどのポテンシャルの場合も構造安定な双曲型に変わりホモクリニック軌道も transversal タイプであるため，相空間内の流れの構造が同じになるためと考えられる。

2\. 外力の振巾 (F) 依存性

強制外力の大きさ F を変えると，F の大きさがポテンシャルの井戸の深さ程度を境にして，それより大きい場合，井戸の底に閉じ込められた準周期運動（KAMトーラス）が消滅する。このために F を大きくするにつれて位置 x の長時間相関がなくなることがわかった。

3\. 散逸の効果

$F=0$ の時に流れがセパラトリクスに収束するように散逸を加える。

$$
\ddot{x} + V'(x) = F\sin 2\pi t - \delta\dot{x}\underbrace{\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x)\right)}_{\text{セパラトリクス}}.
$$

パラメタ空間（F，$\delta \geq 0$）のある領域で流れはストレンジ・アトラクタ（SA）を持つ。F

$=0.01$ に固定し，散逸を加えて得られるＳＡ上の軌道を調べた。δ を摂動とみなした評価では，時間が

$$T \simeq \frac{1}{\mathrm{const}\cdot\delta}\ ,$$

$$\mathrm{const} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t d\tau\ \left\{\frac{3}{2}\dot{x}(\tau)^2 + V(x(\tau))\right\}$$

で保存系の軌道からのずれがオーダー１になることがわかる。これは数値計算結果と矛盾しない。流れの様相という観点でいうならば保存流ではKAMの周りにさらに長周期を持つ小さいKAM が存在し長時間相関を相関数 $f(x,\dot{x})$ は持つが，散逸によってこの無限の階層を持った長周期構造が周期の長い側から消えるため相変数の長時間相関がなくなると理解できる。

4.　終わりに

ホモクリニック軌道に由来するカオス的領域の存在は，保存系の場合，古典統計力学の準エルゴード仮設の成立を示唆する点で興味深い。この方向での適当な（ある程度物理的リアリティーを有する）多自由度保存系の解析は意義があると思われる。

有限状態力学系とストレンジアトラクター

日大・理工　原子力研究所　　島　田　一　平

計算機の内部状態は有限個である。[注1] このような計算機を一定の規則（アルゴリズム）にしたがって動かしていけば，有限回のステップのうちにかならずもとの状態にもどることになる。すなわち，力学系としてみた計算機は全ての軌道が周期軌道であり，その周期は計算機の全メモリー容量を N ビットとして 2^N より長くはない。

さて，カオス的アトラクターをもつ力学系を計算機上でシミュレートすることを考える。このとき，カオスのもつ軌道の複雑さは計算機のふるまい[注2] としてどのように現われてくるだろうか。

カオスを示す力学系としてロジスティック写像

$$x_{n+1} = f_a(x_n) = a\cdot(1-x_n)\cdot x_n$$