(iii) (L_1', L_2)と(L_3, L_4)の両ペアーのそれぞれについて(*)が成立し，かつ，縮退の破れの深さは両ペアーで共通の大きさを持つ。

$a=1.4$，$b=0.3$ の Hénon 系では $\hat{L}_1>0$，$\hat{L}_2<0$ であるから，小さな d については，L_1，$L_2>0$，L_3，$L_4<0$ である。正のリヤプノフ指数のみならず，負のリヤプノフ指数も敏感なのである。さらに次のこともわかる。

$$D_L(d)-D_L(0)\cong c'/-\ln d \tag{***}$$

ここで D_L は結合系のアトラクターのリヤプノフ次元である。

§4. おしまいに

§3の結果は任意次元のカオスについても成立するものと推測されるが，理論はまだない。上で見てきたように，カオスは，結合に対して著しく簡単で，〝美しい〟(少くとも私には)応答を示す。これの科学的意義は果たして何であろうか？更なる努力が必要である。

1) J. P. Crutchfield and N. H. Packard, Physica **7D** (1983), 201.
2) H. Daido, Prog. Theor. Phys. **72** (1984), 853 and **73** (1985), 310 (E); Prog. Theor. Phys. Suppl. **79** (1984), 75.
3) H. Daido, Phys. Lett. **110A** (1985), 5.

カオスの摂動論的アプローチ

国士館大・工　清水敏寛

非線型微分方程式系でその時間発展が記述できるような系のカオスの統計的性質を調らべようとする場合，広い意味での粗視化の手続きが重要となる。従来この粗視化は，ローレンツプロットやポアンカレマップを通して行なわれている。平衡状態の近くでの力学を議論する時には，最も確からしい軌道とそのまわりのゆらぎという形に時間発展を分けることが有効であった。カオスの場合には，これ程簡単にはいかないが別の意味での分解が可能である。粗視化ができた場合には，単に解析が容易になるばかりでなく，カオス発生の機構や，カオスの確率的解釈にとってたいへん有益である。

ここでは，系が小さなパラメータを含む場合に上記の問題を解析的に扱える一つの方法として非線型スケールの方法を提案し，一つのモデルに適用した。

モデル方式として，散逸系（シート型アトラクター，トーラス型アトラクター）と保存系の両方に適用可能なものとして次式を提案した。

$$\ddot{x}(t)-\varepsilon a\dot{x}(t)+bx(t)\left(x(t)^2-1+m(t)\right)=0,$$
$$\dot{m}(t)-\varepsilon\left[cm(t)-fx(t)^2-r\frac{\dot{x}(t)^2}{(1-m(t))^2}\right]=0. \tag{1}$$

ここで a，b，c，f，r は正のパラメータで，ε は小さなパラメータである。小さいパラメータ ε を正にとり，r を分岐パラメータに選ぶと，系(1)はトーラス型のアトラクターを持つ。$\varepsilon<0$ とし，$r=0$ とおくと系(1)はローレンツ方程式と一致し，シート型のアトラクターを持つ。

まず非線型スケールの方法によって(1)式の摂動解を求めた。非線型スケールの方法では，$\tau=\varepsilon t$ と $\frac{d\omega}{dt}=\phi(\tau)$ で定義された２つの時間スケール τ と ω を導入する。ここで $\phi(\tau)$ は計算の過程で決まる τ の関数である。摂動の最低次は(1)式から明らかなように，４次ポテンシャル内の運動で表わされ，そのエネルギーを E_0 とするとその解は次式で表わされる。

(I)　$E_0>0$，$\phi\gg\varepsilon$

$$x\cong A(\nu, m_0)\,\mathrm{cn}(K(\nu)\omega, \nu)$$
$$\frac{d\nu}{d\tau}=N_1(\nu, m_0),\quad \frac{dm_0}{d\tau}=D_1(\nu, m_0)$$
$$\frac{d\omega}{d\tau}=\phi=\frac{1}{K(\nu)}\sqrt{\frac{b(1-m_0)}{2\nu^2-1}}$$

(II)　$E_0<0$，$\phi\gg\varepsilon$

$$x\cong B(\nu, m_0)\,\mathrm{dn}(K(\nu)\omega, \nu)$$
$$\frac{d\nu}{d\tau}=N_2(\nu, m_0),\quad \frac{dm_0}{d\tau}=D_2(\nu, m_0)$$
$$\frac{d\omega}{d\tau}=\phi=\frac{1}{K(\nu)}\sqrt{\frac{b(1-m_0)}{2-\nu^2}}$$

ν が１に近いところでは，$E_0\approx 0$ となり ϕ は小さくなるので，この領域の解は ε の１次のオーダーまで取り入れた次式で表わせる。

(III)　$E_0\approx 0$，$\phi\lesssim\varepsilon$

$$x\cong\frac{A_0(m_0)}{\cosh(\eta)}+A_0(m_0)\left[\pm(\nu-1)+\varepsilon\Delta\nu(m_0, \eta)\right]\frac{\cosh(\eta)}{2},$$

$$\Delta\nu(m_0,\eta)=\tanh(\eta)\left\{2f-a+\frac{2br}{5}+\left(a-2f-\frac{3c}{2}\right)m_0\right\}/3\sqrt{b}(1-m_0)^{\frac{3}{2}}$$

任意の初期条件から出発し，各領域での解がその領域の境界まできたら，次の領域の解に接続することによって解の長時間の振舞いを調らべることができる。

まとめ

(1) 3次元$(x,\ p=\dot{x},\ m)$の問題が，$(\nu,\ m_0)$の2次元の問題に縮約できた。

(2) カオスの確率的性格は領域(Ⅲ)の解から出る。特にνの飛び$\Delta\nu$が無視できる場合には，解はregularな振舞いを示す。飛び$\Delta\nu$の初期値に関する平均は0となる。この飛び$\Delta\nu$がカオスの決定論的側面と確率的側面を調和させ，カオスの統計的性質やカオスへの分岐のし方を決定することが示された。

(3) 系(1)のシミュレーションの結果と理論の結果が，分岐ダイヤグラムとポアンカレマップについて比較され，定性的にも定量的にもよく一致することが示された。

(4) ローレンツ方程式や保存系への適用も議論された。

ホモクリニックカオスの長時間ふるまいと散逸効果

京大・理　　秋山真治，相沢洋二

周期外力の下での非線型振動子

$$\ddot{x}+V'(x)=F\sin 2\pi t$$

の解軌道の統計性について報告した。

ポテンシャル$V(x)$は，$x=0$に不安定な平衡点を持たせてとる (double minimum potential)。外力のない時，3次元相空間$\boldsymbol{R}^2\times T^1$内に不安定周期軌道

$$(x(t)=0,\ \dot{x}(t)=0,\ t),\quad 0\leq t<1$$

が存在することになる。外力を加えると，この周期軌道の安定多様体と不安定多様体は分離し交叉する。解の一意性から，2つの多様体の交叉点はひとつの解軌道を与える。ホモクリニック軌道と呼ばれるこの軌道の近くの軌道はカオス的ふるまいをすることがわかっている。保存