

## 宇宙論におけるカオス

京大・基研 石原秀樹

## § 1. はじめに

ビッグ・バン宇宙の観測的基礎である 3 K 黒体放射が等方的であることにより、標準的時空モデルは、時空の計量に一様等方性を仮定した上で Einstein 方程式を解くことによって得られている (Friedmann 宇宙)。このモデルに基く初期宇宙での元素合成の計算等、満足な結論は得られているが、一方、仮定されている一様等方性や宇宙の長い寿命を得るためには初期条件を微調整しなければならないという難点 (地平線問題・エントロピー問題)<sup>1)</sup>もある。

宇宙の初期特異点付近での振舞は、Friedmann 的ではなく、むしろ振動的であることが Lifshitz ら<sup>2)</sup>によって指摘され、また、Misner<sup>3)</sup>は振動宇宙モデルによって地平線問題の解決を試みた (Mixmaster 宇宙)。この振動は Einstein 方程式の非線型性を反映し、特定の量に注目するとカオス的性質を持っている。<sup>4)</sup>ここでは、Mixmaster 宇宙の振動的振舞について簡単な解説をする。

## § 2. 正準形式によるアプローチ

Mixmaster モデルを概観するには Misner らによる正準形式<sup>5)</sup>に従うのが適していよう。

3次元空間が歪んだ  $S_3$  であるような計量

$$\begin{aligned} dS^2 &= -(N(t) dt)^2 + (e^{\alpha_1(t)} \sigma_1)^2 + (e^{\alpha_2(t)} \sigma_2)^2 + (e^{\alpha_3(t)} \sigma_3)^2 \\ &= -(N dt)^2 + e^{2\Omega} \left\{ e^{\beta_+ + \sqrt{3}\beta_-} \sigma_1^2 + e^{\beta_+ - \sqrt{3}\beta_-} \sigma_2^2 + e^{-2\beta_-} \sigma_3^2 \right\} \end{aligned} \quad (1)$$

を考える。ここで  $\sigma_i$  は  $SO(3)$  左不変な 1-形式である。 $N(t)$  は時間の進み方、 $\alpha_i(t)$  は空間の各方向の伸び縮みを表わす。ここでは力学変数として  $\Omega(t)$  (体積)、 $\beta_{\pm}$  (非等方性) を用いるのが便利である。

計量を真空の Einstein 作用積分 (非等方宇宙の初期は真空の近似が良い) に入れると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{12} \int R \sqrt{-g} d^4 x \\ &= \int \frac{1}{2N} \left\{ -\dot{\Omega}^2 + \dot{\beta}_+^2 + \dot{\beta}_-^2 + \frac{N}{6} {}^{(3)}R \right\} e^{-3\Omega} d^4 x - \int \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2N} \dot{\Omega} e^{-3\Omega} \right) d^4 x \\ &\quad \left( \dot{\quad} \equiv \frac{d}{dt} \right) \end{aligned}$$

ここで、 ${}^{(3)}R$ は3次元空間のスカラー曲率である。全微分項を落とし、正準運動量  $p_\Omega = -N^{-1} \dot{\Omega} e^{-3\Omega}$ ,  $p_\pm = N^{-1} \dot{\beta}_\pm e^{-3\Omega}$  を用いると

$$S = \int \left\{ p_\Omega \dot{\Omega} + p_+ \dot{\beta}_+ + p_- \dot{\beta}_- - \frac{N}{2} \mathcal{M} e^{3\Omega} \right\} d^4x \quad (2)$$

ここで、 $N$ は共役量を持たないので  $N$ での変分は束縛条件

$$\mathcal{M} \equiv \frac{1}{2} \left\{ -p_\Omega^2 + p_+^2 + p_-^2 - \frac{1}{6} {}^{(3)}R e^{-6\Omega} \right\} = 0 \quad (3)$$

を与える。(形式的ハミルトニアンがゼロ!)これを  $p_\Omega$ について解き、(2)に代入すると

$$\begin{aligned} S &= \int \left\{ p_+ \dot{\beta}_+ + p_- \dot{\beta}_- - H_{\text{ADM}} \dot{\Omega} \right\} d^4x \\ &= \int \left\{ p_+ \beta'_+ + p_- \beta'_- - H_{\text{ADM}} \right\} d\Omega d^3x \quad \left( ' = \frac{d}{d\Omega} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

$$H_{\text{ADM}}^2 = p_\Omega^2 = p_+^2 + p_-^2 - \frac{1}{6} {}^{(3)}R e^{-6\Omega}$$

が得られる。 $H_{\text{ADM}}$ はA.D.M.ハミルトニアンと呼ばれる。これより、Mixmasterモデルはポテンシャル  $-\frac{1}{6} {}^{(3)}R e^{-6\Omega}$ の中を運動する粒子と考えることができる。ポテンシャルは三角形の井戸型で、(図1)壁が動くので粒子の運動は図2で示されるようになる。

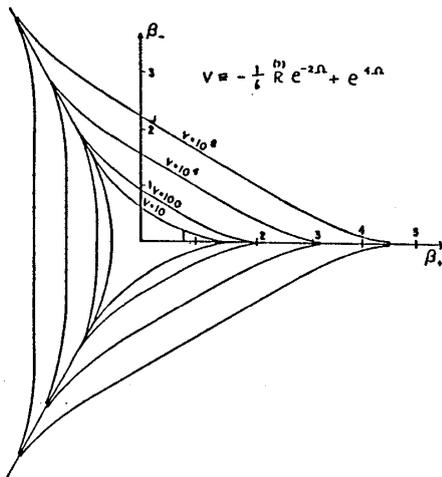


図1 The Potential  $V(\beta_+, \beta_-)$  for Type IX Models

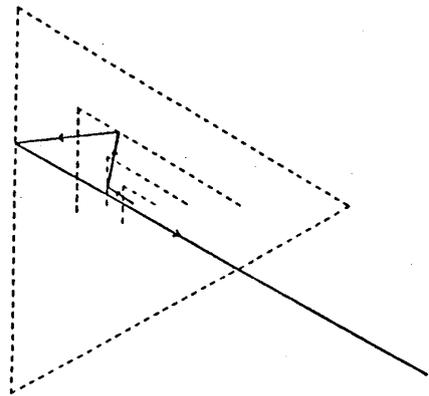


図2 The expanding potential wall and the track of the universe point

### § 3. 振動の確率的振舞

空間のスケール  $\alpha_i$ の時間変化は図3のようになる。 $\alpha_i$ の直線的な部分は粒子がポテンシャル壁から充分離れている時期に対応する。この部分は、1-パラメータ  $u$  ( $1 < u < \infty$ )で特

徴づけられる Kasner 解によって記述される。折れ曲り部分は壁による反射で、時空は別のパラメータ  $u'$  で特徴づけられる Kasner 解に遷移する。反射による  $u$  の写像は簡単に求めることができ、

$$u' = \begin{cases} u-1 & u > 2 \\ (u-1)^{-1} & u < 2 \end{cases} \quad (5)$$

(サイクルの  
終わり)

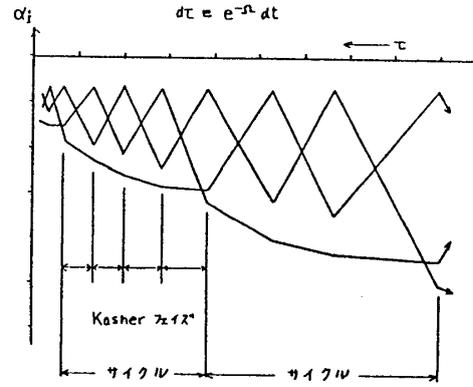


図3 The oscillatory evolution of the scale factors

となる。サイクル (図3参照) の終わりの  $u$  を  $u_0$  と書くと、これは次のサイクルの中の振動の数を与える。  $u_0$  の写像に注目すると

$$u'_0 = \frac{1}{u - [u_0]} \quad \therefore \quad u_0 = [u_0] + \frac{1}{[u'_0] + \frac{1}{[u''_0] + \dots}} \quad (6)$$

となり、サイクル中の振動の数は  $u_0$  の無限連分数展開によって次々と与えられる。  $u_0$  の代わりに  $x = u_0^{-1}$  ( $0 < x < 1$ ) を考えれば  $x' = x^{-1} - [x^{-1}]$  (図4) となり、この写像はカオスを示す。この写像の不変測度およびK-エントロピーは周知で

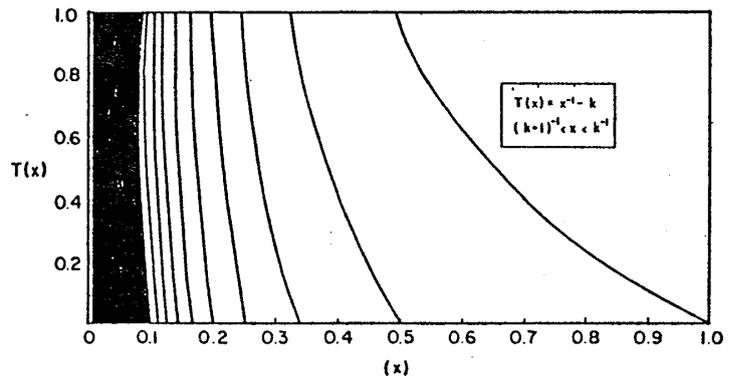


図4 The Mixmaster return mapping  $T(x) = x^{-1} - |x^{-1}|$  in analytic form

$$\mu(x) = \frac{1}{\log 2} \frac{1}{1+x}, \quad h_\mu = \frac{\pi^2}{6(\log 2)^2} \quad (7)$$

である。  $\mu(x)$  より1つのサイクル中の振動の数  $n$  の期待値  $P(n)$  が

$$P(n) = \int_{1/(n+1)}^{1/n} \mu(x) dx = \frac{1}{\log 2} \log \frac{(n+2)^2}{n(n+2)} \quad (8)$$

と求まる。

#### § 4. おわりに

Mixmaster モデルのダイナミクス自体は興味を持たれているものの、時空のカオスが本質的

## 研究会報告

な役割をなすような現実的な宇宙モデルは作られていないのが現状である。始めに触れた初期条件の問題をこのモデルで解決するためには、時空のダイナミカルなエントロピーと現宇宙に存在する熱エントロピーを結びつけることが必要であろう。

最近、相互作用の統一理論と関連して多次元での Mixmaster モデルも調べられている。ここで述べたような単純なカオスは4次元時空の場合だけのようである<sup>6)</sup> また、Mixmaster 時空の量子化の試み<sup>7)</sup> もなされていることを付け加えておく。

## 参考文献

- 1) W. Rindler, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **116** ('56) 663.  
R. H. Dicke and P. J. E. Peebles, "General Relativity" ed. by S. W. Hawking et. al.
- 2) V. A. Belinskii, I. M. Khalatnikov and E. M. Lifshitz, *Adv. Phys.* **19** ('70) 525.
- 3) C. W. Misner, *Phys. Rev. Lett.* **22** ('69) 1071.
- 4) J. D. Barrow, *Phys. Rep.* **85** ('82) 1.
- 5) R. Arnowitt, S. Deser and C. W. Misner, in "The Dynamics of General Relativity" ed. by Witten, N. P. Ryan, Jr. and L. C. Shepley, "Homogeneous Relativistic Cosmologies".
- 6) A. Tomimatsu and H. Ishihara, *Gen. Rel. Grav.* to appear.  
H. Ishihara, *Prog. Theor. Phys.* **74** ('85) 490.  
T. Furusawa and A. Hosoya, *Prog. Theor. Phys.* **73** ('85) 467.
- 7) W. A. Wright and I. G. Moss, *Phys. Lett.* **B154** ('85) 115.  
T. Furusawa, *Prog. Theor. Phys.* to appear.

## ミクロカノニカル量子化法 — 相転移点近傍での振舞 —

早大・理工 森川善富

### § 1. はじめに

ミクロカノニカル量子化法(以下, MCQ と略す。)は, ゲージ理論(特に fermion まで含めたもの)等における非摂動数値シミュレーションに有用な新しい計算方法を与える可能性を持つ。なかでも準安定状態の近傍の振舞を調べるのに有効であると言われている。<sup>1)~3)</sup> そこで