

パターン形成のスケーリング理論

(東大理) 劉 勇, 鈴木 増雄

不安定状態から安定状態に移る、いわゆる過渡現象は、非平衡系に多く見られる現象である。その場合、系が非線型性を持つため、線型的扱いが困難である。Suzuki¹⁾の過渡現象スケーリング理論は、この現象を記述するのに非常に有力である。最近、Suzuki, Liu and Tsuno²⁾は、Suzukiの理論を、時間相関を持つ、たカロード・ノイズの場合に拡張した。Kawasaki, Yalabik and Gunton³⁾は、Suzukiの理論を使い、TDGLモデルの解析を行い、また de Pasquale, Tartaglia and Tombesi⁴⁾は、有限の強さのノイズに対するスケーリング理論の有効性を、解析的及び数値的に研究した。

今日、われわれは、Suzuki¹⁾のスケーリング理論を周期的空間パターン形成に応用し、スケーリング理論の一般性について述べる。われわれが扱う基礎方程式は、Swift and Hohenberg⁵⁾が導いたTDGL型の方程式で、次のようである:

$$\dot{\varphi}(x,t) = \gamma \varphi(x,t) - g \varphi(x,t)^3 - D(\nabla^2 + k_c^2) \varphi(x,t) + \eta(x,t) \quad (1)$$

但し $\varphi(x,t)$ は空間に依存する局所オーダ・パラメータ、 $\eta(x,t)$ はノイズである。

$$\langle \eta(x,t) \rangle = 0, \quad \langle \eta(x,t) \eta(x',t') \rangle = 2\varepsilon \delta(x-x') \delta(t-t') \quad (2)$$

$\gamma, g, D, k_c, \varepsilon$ は、それぞれ系に特有のパラメータとする。最近、Greenside and Coughran⁶⁾は、(1)を使い、た計算機実験を行った(但し、彼らは(1)のノイズの項を無視するかわりに、初期条件をランダムとし、行った)。以下の計算では、われわれは次の仮定をする: $\varphi(x,0) \equiv 0, \varepsilon \ll 1, \Gamma_x \gg \Gamma_y$ (系が一次元的だと仮定、たたし Γ_x, Γ_y はアスペクト・レイヨ)。

(1)について、Fourier変換を行う:

$$\dot{\varphi}_k = \gamma \varphi_k - \frac{g}{(2\pi)^2} \int dk' \int dk'' \delta(k-k'-k'') \varphi_{k'} \varphi_{k''} \varphi_k - D(k^2 + k_c^2) \varphi_k + \eta_k(t) \quad (3)$$

但し

$$\varphi_k(t) \equiv \int e^{ikx} \varphi(x,t) dx, \quad \varphi_k(0) \equiv 0, \quad \langle \eta_k(t) \rangle = 0, \quad \langle \eta_k(t) \eta_{k'}(t') \rangle = 4\pi \varepsilon \delta(k+k') \delta(t-t') \quad (4)$$

(3)からわかるように、非線型性のため、三つの違う波数のモードがお互いにカプラリングしているため、次のように、非線型性 g について展開する:

$$\varphi_k \equiv \sum_{n=0}^{\infty} g^n h_n \quad (5)$$

h_n は次のようになる:

$$\begin{cases} h_0 = e^{\delta t} e^{-D(k^2 - k_c^2)t} \int_0^t ds e^{-\gamma s} e^{D(k^2 - k_c^2)s} \eta_k(s) \\ h_1 = \frac{1}{(2\pi)^2} e^{\delta t} e^{-D(k^2 - k_c^2)t} \int_0^t e^{\gamma s} e^{D(k^2 - k_c^2)s} \int dk' \int dk'' \delta(k - k' - k'') h_0' h_0'' h_0 \\ \vdots \end{cases} \quad (6)$$

但し $h' \equiv h(k')$. 次は, Fourier Space での相関関数を調べる:

$$C(k, k) \equiv \langle \varphi_k \varphi_k \rangle = \langle h_0 h_0 + g(h_0 h_1 + h_1 h_0) + \dots \rangle \equiv \sum_{n=0}^{\infty} g^n C_n(k, k) \quad (7)$$

$$C(x, t) \equiv C(x_1 - x_2, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dk' \int dk'' e^{-ik'x_1 - ik''x_2} C(k, k) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} g^n C_n(x, t) \quad (8)$$

ゼロ次では:

$$C_0(k, k) = \frac{2\pi \varepsilon \delta(k+k_c) e^{2\delta t} \tilde{C}_0(k, t)}{\gamma - D(k^2 - k_c^2)^2} \quad (9)$$

但し

$$\tilde{C}_0(k, t) \equiv e^{-2D(k^2 - k_c^2)^2 t} \quad (10)$$

時間 t が十分大きいところでは, \tilde{C}_0 は次のように近似できる: (図 I)

$$\tilde{C}_0(k, t) \approx e^{-2Dk_c^2(k+k_c)^2 t} + e^{-2Dk_c^2(k-k_c)^2 t} \quad (11)$$

故に

$$C_0(x, t) = \frac{\varepsilon}{\gamma} e^{2\delta t} \frac{e^{-\frac{x^2}{32Dk_c^2 t}}}{\sqrt{32\pi Dk_c^2 t}} \cos(k_c x) \quad (12)$$

C_0 は非線型性を無視した線型理論に相当する。(12)が, オータ-パラメータの指数関数的成長, 及び k_c を波数とする空間周期パターンのトクインが \sqrt{t} で広がる様子がわかる。但し, 非線型性を無視したため, オータ-パラメータはいつまでも成長しつづけ, 安定状態におちつく機構を記述していない。次は, 非線型性生 g についての高次項を計算する。

(11)の近似を使うと, n 次の項は, 次のようになることが示せる:

$$C_n(x, t) = \left\langle \left(-\frac{1}{\gamma} \right)^n \left(\frac{\xi^2}{\sqrt{32\pi Dk_c^2 t}} \right)^{n+1} \right\rangle e^{-\frac{x^2}{32Dk_c^2 t}} \cos(k_c x) \quad (13)$$

但し

$$\langle \xi \rangle = 0, \quad \langle \xi^2 \rangle = \frac{\varepsilon}{\gamma} \quad (14)$$

(14)からわかるように、時間 t が大きいところでは、(8)の各々の項が時間にしたがって、指数関数的に発散する。そこで、われわれは次のような scaling limit を取る：

$$SC\text{-lim} \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\varepsilon e^{2\gamma t}}{\sqrt{32\pi D k_c^2 t}} = \text{fixed} \right) \quad (15)$$

すると、(8)の級数は、次のような解にまとめられる：

$$C(x, t) = \left\langle \frac{\xi^2 e^{2\gamma t}}{\sqrt{32\pi D k_c^2 t}} \right\rangle e^{-\frac{x^2}{32 D k_c^2 t}} \cos(k_c x) \quad (16)$$

但し、 $\langle \xi \rangle = 0$, $\langle \xi^2 \rangle = \frac{\varepsilon}{\gamma}$. (15)の新しく Modify (た scaling limit と Suzuki¹⁾の scaling limit

$$SC\text{-lim}^{(s)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon e^{2\gamma t} = \text{fixed}) \quad (17)$$

との違いに注目されたい。(16)からわかるように、 $C(x, t)$ は非線型性も含んでいるため、時間が大きいところでは全空間に広がるコヒーレントな安定な周期パターンにおちつく様子を正しく記述している。

今までは時間がある程度大きいところの議論で「おちたか」、次に時間が小さい初期ふるまいについて考える。この場合、 C_0 については次のように近似する(図II)：

$$\tilde{C}_0(k, t) \approx \begin{cases} 1 & |k| \leq k_{1/2} \\ 0 & |k| > k_{1/2} \end{cases} \quad (18)$$

但し、 $k_{1/2}$ は、 \tilde{C}_0 が Peakの半分になるところの k の値とする。 $C(x, t)$ は

$$C(x, t) \approx \frac{\varepsilon}{\gamma} (e^{2\gamma t} - 1) \frac{e^{-\frac{x^2}{32 D k_c^2 t}}}{(2\pi^2 D t)^{1/4}} \quad (t \text{ 小さい}) \quad (19)$$

秩序ができるまでに要する時間 t_0 を、オクター・パラメータが、最終値の半分まで成長した時刻と定義すると、

$$t_0 \approx \frac{1}{2\gamma} \log \left(\frac{\gamma^2 \sqrt{32\pi D k_c^2}}{\varepsilon} \right) + \frac{1}{4\gamma} \log \left(\frac{1}{2\gamma} \log \left(\frac{\gamma^2 \sqrt{32\pi D k_c^2}}{\varepsilon} \right) \right) \quad (20)$$

(20)の第一項は、Suzukiの理論のオンセット・タイムに相当し、第二項は空間相互作用のため、余分にかかる時間を表す。

周期パターンを含んだ「空間ドメイン」が見えはじめる時刻 t_p は、

$$t_p \approx \frac{1}{2 D k_c^2} \quad (21)$$

図III, IVでは、相関関数 $C(x, t)$ の生長、図Vでは、その空間拡散を、それぞれ表す。

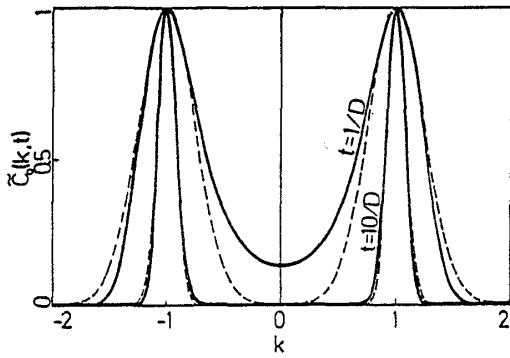


图 I (破線:近似)

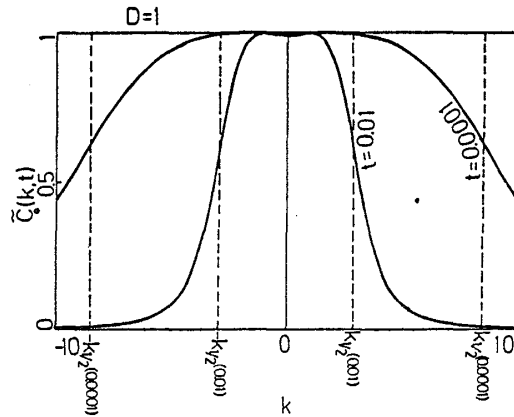


图 II (破線:近似)

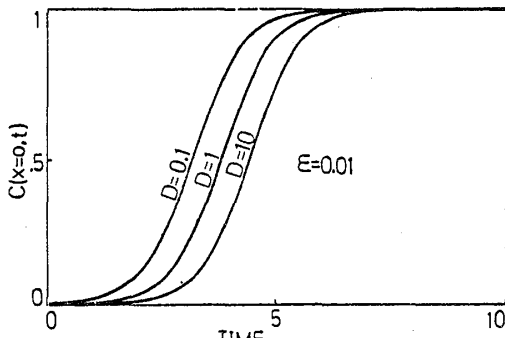


图 III

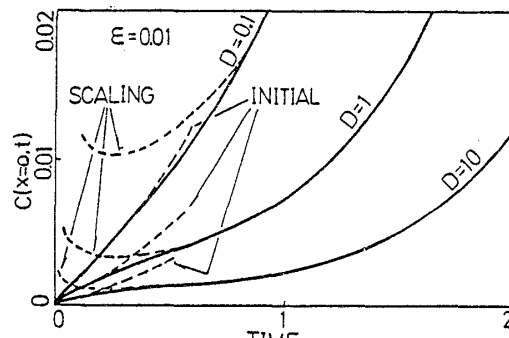


图 IV

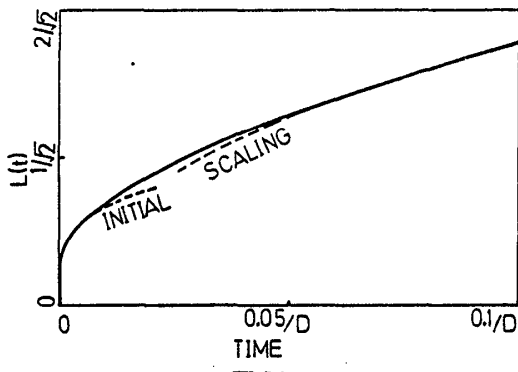


图 V

文献:

- 1) M.Suzuki, Prog.Theor.Phys. 56(1976)77; Adv.Chem.Phys. 46(1981)195; J.Math.Phys. 26(1985)601; Prog.Theor.Phys.Suppl. 79(1984)125.
- 2) M.Suzuki, Y.Liu and T.Tsuno, submitted to Physica A.
- 3) K.Kawasaki, M.C.Yalabik and J.D.Gunton, Phys.Rev.A 17(1978)455.
- 4) F.de Pasquale, P.Tartaglia and P.Tombesi, Phys.Rev.A 31(1985)2447.
- 5) J.Swift and P.C.Hohenberg, Phys.Rev.A 15(1977)319.
- 6) H.S.Greenside and W.M.Coughran, Jr., Phys.Rev.A 30(1984)398.