スピングラスの交流非線形帯磁率について

東北大　工　　白倉　孝行
京大　基研　　高山　一

§1.　はじめに

ランダムな無限長距離相互作用をもつイジングスピンのスピングラス(SKスピングラス)[1]は、静的磁場中でAT線[2]と呼ばれる境界線で常磁性相とスピングラス（SG）相が分けられている。このAT線を特徴づける異常としては、Bray,Moore[3]によって指摘されたSG帯磁率

$$\chi_R = \frac{1}{N}\sum_{ij}[\chi_{ij}\chi_{ji}]_J$$

$$\chi_{ij} \equiv \langle\sigma_i\sigma_j\rangle - \langle\sigma_i\rangle\langle\sigma_j\rangle$$

$\langle\cdots\rangle$　；　熱平均，　　$[\cdots]_J$　；　ランダム配置平均

の発散や、Sompolinsky,Zippelius[4]の動的分子場理論によって示された、系の磁場に対する応答の仕方を特徴づける緩和時間の発散などがある。特に、動的分子場理論によると、SG相では相関関数$C(\omega)=[\langle\sigma_i(\omega)\sigma_i(\omega)\rangle]_J$と応答関数$G(\omega)=[d\langle\sigma_i(\omega)\rangle/dh_i(\omega)]_J$は、$\omega\sim0$に複雑な構造をもつことが知られている。この$\omega\sim0$での複雑な構造は、有限サイズの系を考えたときに有限となるスピンクラスターの緩和時間が複雑な分布をもつことに対応づけられる[5]。そこで、SGに交流磁場をかけ、その周波数を小さくしていって、これらのスピンクラスターの緩和時間の逆数程度になったときに、どのようなことが起きるのかは、大変興味深い問題である。しかし、これらを正確に取り扱うためには、有限サイズ効果$O(N^{-1}, N^{-2},\cdots)$を正確に取り扱わなければならない。ここでは、この研究の第一段階として、高温側で$C(\omega)$，$G(\omega)$の$\omega\sim0$の複雑な構造は考えずに、すなわち、SK解[1]に基づいて、小さな交流磁場中での相関関数と応答関数の振舞いを調べる。特に、静的なSK解を用いると、AT線で非線形帯磁率は発散しないことが知られている。一方、動的な方法によれば、緩和時間はAT線で発散する。ここでは、交流磁場中での動的分子場理論を考え、これらの関係を統一的に調べる。

§2.　スピングラスの動的分子場理論

次のLangevin型の運動方程式に従うソフトスピン系を考える。

$$\frac{\partial\sigma_i}{\partial t} = -\Gamma_0\frac{\delta(\beta H)}{\delta\sigma_i} + \zeta_i(t) \tag{1}$$

$$\beta H = \frac{1}{2}\sum_{ij}(r_0\delta_{ij} - \beta J_{ij})\sigma_i\sigma_j + \frac{u}{8}\sum_i\sigma_i^4 - \beta\sum_i h_i\sigma_i \tag{2}$$

$$\langle\zeta_i(t)\zeta_j(t')\rangle = 2\Gamma_0\delta_{ij}\delta(t-t') \tag{3}$$

ここで、$\beta=1/kT$，$k=1$とし、スピンσ_iは$-\infty$から∞まで変わることができると考える。r_0とuは、スピンのソフト度を表わすもので、r_0/uを一定に保って、$r_0\to-\infty$，$u\to\infty$の極限を考えるとイジングスピン系に帰着する。交換相互作用J_{ij}は、$[J_{ij}]_J=0$，$[J_{ij}^2]_J=J^2/N$(ここで、Nは全スピンの数)をもつガウス分布に従って分布しており、すべてのスピン対に存在するものとする。この相互作用の無限長距離性のために、運動方程式は母関数法[4],[6]を用いて簡単にノイズ平均とランダム配置平均を実行することができ、single site問題に帰することができる。その結果に時間に関するフーリエ変換を施せば、次の運動方程式を得る（ここで、single site問題に帰されたので、サイトの添字を落とす）。

$$\left(r_0-\frac{i\omega}{\Gamma_0}\right)\sigma(\omega)+\frac{u}{2}\int\frac{d\omega_1}{2\pi}\frac{d\omega_2}{2\pi}\sigma(\omega_1)\sigma(\omega_2)\sigma(\omega-\omega_1-\omega_2)$$
$$=\beta h(\omega)+\beta^2J^2\int\frac{d\omega'}{2\pi}G(\omega,\omega')\sigma(\omega')+\phi(\omega) \tag{4}$$

$$\langle\phi(\omega)\phi(\omega')\rangle=2\pi\delta(\omega+\omega')\frac{2}{\Gamma_0}+\beta^2J^2C(\omega,\omega') \tag{5}$$

ここで、G（ω，ω′），C（ω，ω′）は、次式で定義される応答関数と相関関数のフーリエ変換である。

$$G(t,t')\equiv\left[\partial\langle\sigma_i(t)\rangle/\partial\beta h_i(t')\right]_J=\int\frac{d\omega}{2\pi}\frac{d\omega'}{2\pi}e^{-i\omega t+i\omega' t'}G(\omega,\omega')$$
$$C(t,t')\equiv\left[\langle\sigma_i(t)\sigma_i(t')\rangle\right]_J=\int\frac{d\omega}{2\pi}\frac{d\omega'}{2\pi}e^{-i\omega t-i\omega' t'}C(\omega,\omega') \tag{6}$$

この定義式において $\lim_{h_i\to 0}$ をとっていないことに注意されたい。従って外場ｈに交流成分がある場合、G（ｔ，ｔ′），C（ｔ，ｔ′）は、その時間差だけの関数とはならない。運動方程式（４），（５）式を $O(u^2, h^2)$ までの近似で解くと、応答関数と相関関数の満たすべき次の方程式を導くことができる。

$$(G^{-1})_{\omega,\omega'}=(G_0^{-1})_{\omega,\omega'}+\frac{3u}{2}\int\frac{d\omega_1}{2\pi}C(\omega_1,\omega-\omega'-\omega_1)$$
$$-\frac{9u^2}{2}\int\frac{d\omega_1}{2\pi}\frac{d\omega_1'}{2\pi}\frac{d\omega_2}{2\pi}\frac{d\omega_2'}{2\pi}C(\omega_1,\omega_1')C(\omega_2,\omega_2')G(\omega-\omega_1-\omega_2,\omega'+\omega_1'+\omega_2') \tag{7}$$

$$(G_0^{-1})_{\omega,\omega'}=2\pi\delta(\omega-\omega')\left[r_0-\frac{i\omega}{\Gamma_0}\right]-\tilde\beta^2G(\omega,\omega') \tag{8}$$

$$C(\omega,\omega')=\int\frac{d\omega_1}{2\pi}\frac{d\omega_1'}{2\pi}G(\omega,\omega_1)\Lambda(\omega_1,\omega_1')G(\omega',\omega_1') \tag{9}$$

$$\Lambda(\omega,\omega')=2\pi\delta(\omega+\omega')\frac{2}{\Gamma_0}+\tilde\beta^2C(\omega,\omega')+\tilde h(\omega)\tilde h(\omega')$$
$$+\frac{3u^2}{2}\int\frac{d\omega_1}{2\pi}\frac{d\omega_1'}{2\pi}\frac{d\omega_2}{2\pi}\frac{d\omega_2'}{2\pi}C(\omega_1,\omega_1')C(\omega_2,\omega_2')C(\omega-\omega_1-\omega_2,\omega'-\omega_1'-\omega_2') \tag{10}$$

ここで、$\tilde\beta=\beta J$，$\tilde h=\beta h$　とした。

§3．ＡＴ線近傍での応答関数と相関関数の振舞い

ここで、外場としては静的磁場と交流磁場が存在する場合を考え、$\tilde h(t)=H+2h\cos(\nu t)$ とする。これをフーリエ変換して、

$$\tilde h(\omega)=H2\pi\delta(\omega)+h2\pi\{\delta(\omega-\nu)+\delta(\omega+\nu)\} \tag{11}$$

を得る。これからは、$1\gg H\gg h$ の場合にのみ注目する。（７）～（１０）式で外場を陽に含むのは、ノイズバーテックスΛ（ω，ω′）だけで、その項 $\tilde h(\omega)\tilde h(\omega')$ は、

$$\tilde h(\omega)\tilde h(\omega')=\{H^22\pi\delta(\omega)+h^22\pi(\delta(\omega-\nu)+\delta(\omega+\nu))\}2\pi\delta(\omega+\omega')$$
$$+h^22\pi(\delta(\omega-\nu)+\delta(\omega+\nu))2\pi(\omega-\omega')$$
$$+Hh(2\pi)^2\{\delta(\omega)(\delta(\omega'-\nu)+\delta(\omega'+\nu))+\delta(\omega')(\delta(\omega-\nu)+\delta(\omega+\nu))\} \tag{12}$$

という形に書ける。そこで、相関関数と応答関数も

$$C(\omega,\omega') = 2\pi\,\delta(\omega+\omega')\,\tilde{C}(\omega) + \delta C_2(\omega,\omega')$$
$$G(\omega,\omega') = 2\pi\,\delta(\omega-\omega')\,\tilde{G}(\omega) + \delta G_2(\omega,\omega') \tag{13}$$

という形に書いて、時間並進対称性をもつ部分と、そうでない部分に分けて議論をすることにする。

３．１）　時間並進対称な部分

時間並進対称な部分は、（７）～（１０）式に（１２），（１３）式を代入して、（７），（８）式のδ（ω－ω′）に比例する項と（９），（１０）式のδ（ω＋ω′）に比例する項に注目すればよい。これらのことと、交流磁場ｈは小さいという仮定から、時間並進対称な相関関数 $\tilde{C}$（ω）は、次のように書けることがわかる。

$$\tilde{C}(\omega) = C_1(\omega) + q\,2\pi\,\delta(\omega) + \delta C_1(\omega)\,2\pi\{\delta(\omega-\nu)+\delta(\omega+\nu)\}/2 + O(h^4) \tag{14}$$

$$q = \tilde{G}^2(0)\left[H^2 + \tilde{\beta}^2 q + \frac{3u^2}{2}q^3\right] + O(q\,\delta C_1^2) \tag{15}$$

$$\delta C_1(\omega) = 2|\tilde{G}(\omega)|^2 h^2 \Big/ \left\{1 - |\tilde{G}(\omega)|^2\left[\tilde{\beta}^2 + \frac{9u^2}{2}q^2\right]\right\} + O(\delta C_1^3) \tag{16}$$

$$C_1(\omega) = \frac{|\tilde{G}(\omega)|^2\left[\frac{2}{\Gamma_0} + \frac{9u^2 q}{2}\{C_1(\omega-\nu)+C_1(\omega+\nu)\}\delta C_1(\nu) + \frac{9u^2 q}{2}\int\frac{d\omega_1}{2\pi}C_1(\omega_1)C_1(\omega-\omega_1) + \cdots\right]}{1 - |\tilde{G}(\omega)|^2\left[\tilde{\beta}^2 + \frac{9u^2}{2}q^2\right]} \tag{17}$$

応答関数については、

$$\tilde{G}^{-1}(\omega) = r_0 - \frac{i\omega}{\Gamma_0} - \left(\tilde{\beta}^2 + \frac{9u^2}{2}q^2\right)\tilde{G}(\omega) + \frac{3u}{2}\tilde{C}(t=0)$$
$$- \frac{9u^2 q}{2}\delta C_1(\nu)\{\tilde{G}(\omega-\nu) + \tilde{G}(\omega+\nu)\} - 9u^2 q\int\frac{d\omega_1}{2\pi}C_1(\omega_1)\tilde{G}(\omega-\omega_1) + \cdots \tag{18}$$

となる。さらに、（１７），（１８）式から、次の関係式が成り立つことがわかる。

$$\frac{2}{\omega}\,\mathrm{Im}\,\tilde{G}(\omega) = C_1(\omega) - \delta C_0(\omega,\nu)\,\delta C_1(\nu) + O(\delta C_1^2) \tag{19}$$

ここで、

$$\delta C_0(\omega,\nu) = \frac{|\tilde{G}(\omega)|^2\frac{9u^2}{2}q\frac{\nu}{\omega}\left(C_1(\omega-\nu) - C_1(\omega+\nu)\right) + \cdots}{1 - |\tilde{G}(\omega)|^2\left[\tilde{\beta}^2 + \frac{9u^2}{2}q^2\right]} \tag{20}$$

である。（１７），（１８），（２０）式での・・・は、C_1や$\tilde{G}$の積の積分で表わされる項である（（７），（９），（１０）式参照）。δC_0（ω，ν）は、ν→０のとき零となり、（１９）式から$\tilde{G}$（ω）とC_1（ω）は、線形応答における揺動散逸定理を表わす式と同型の式を満たす。（１９）式とクラマース・クローニッヒの関係式，（１４）式より、

$$\int\frac{d\omega}{2\pi}\frac{2}{\omega}\,\mathrm{Im}\,\tilde{G}(\omega) = \tilde{G}(\omega=0) = \int\frac{d\omega}{2\pi}\left(C_1(\omega) - \delta C_0(\omega,\nu)\,\delta C_1(\nu)\right)$$
$$= \tilde{C}(t=0) - q - \left(1 + \int\frac{d\omega}{2\pi}\delta C_0(\omega,\nu)\right)\delta C_1(\nu) \tag{21}$$

を得る。もし、（１８）式で積分を含む項を無視できたとするならば、（１８）式と（２１）式から$\tilde{G}$（ω）を、（Ｔ，ω，ｑ，δC_1（ν））の関数として計算することができる。そこで、（１７），（１８）式などで積分を含む項は、いったん無視できると仮定して計算して、後でそれらの項の効果を調べることにする。さらに、今ソフトスピン系を考えているので、$\Sigma_i \sigma_i^2$＝Ｎという条件が加わっていると考える。この条件は、$\tilde{C}$（ｔ＝０）＝１と固定することと等価で

ある[7]。

交流磁場hが零の場合のＡＴ線は次のように決められる。$h=0$での凍結qの値をq_0と書くことにする。ＡＴ線は、有効緩和時間$\tau=\lim_{\omega\to 0} i\,d\tilde{G}^{-1}(\omega)/d\omega$の発散点（(18)(21)式より）、

$$1-(1-q_0)^2\left[\tilde{\beta}^2+\frac{9u^2}{2}q_0^2\right]=0 \tag{22}$$

に対応する。これと（15）式より、$H^2=3u^2q_0^3$が得られ、q_0を（15）式より解いてＡＴ線は、

$$H^2 \simeq 3u^2(J-T)^3 \tag{23}$$

と与えられる。

次に、微小な交流磁場hがかけられた場合を考える。このときの凍結の大きさqを、$q\sim q_0+a_1\delta C_1(\nu)\left(1+\int d\omega\,\delta C_0(\omega,\nu)/2\pi\right)$と書いて、$a_1$の値を（15）式と（21）式から決めると、

$$a_1=\frac{-2q_0/(1-q_0)}{\varepsilon+2q_0/(1-q_0)} \tag{24}$$

$$\varepsilon \equiv 1-(1-q_0)^2\left[\tilde{\beta}^2+\frac{9u^2}{2}q_0^2\right] \tag{25}$$

となる。（25）式εはＡＴ線からの距離に対応する。これと（21）式より、交流磁場中での静的な応答関数は、

$$\begin{aligned}\tilde{G}(\omega=0)&=1-q_0-(1+a_1)\delta C_1(\nu)\left(1+\int\frac{d\omega}{2\pi}\delta C_0(\omega,\nu)\right)\\&=1-q_0-\frac{\varepsilon}{\varepsilon+2q_0/(1-q_0)}\frac{2|\tilde{G}(\nu)|^2h^2}{1-|\tilde{G}(\nu)|^2\left[\tilde{\beta}^2+\frac{9u^2}{2}q_0^2\right]}\left(1+\int\frac{d\omega}{2\pi}\delta C_0(\omega,\nu)\right)\end{aligned} \tag{26}$$

と求められる。$\tilde{G}(\nu)$などを具体的に計算すると、次のことがわかる。$\nu/\Gamma_0\ll\varepsilon^2$の関係を保ちながら、$\nu\to0,\varepsilon\to0$の極限を考えると、（26）式右辺の第３項は、ＳＫ解での非線形帯磁率の値にh^2をかけたものになり、有限となる。但し、この有限値は、次のような発散項の相殺を伴って実現されている。$\nu/\Gamma_0\ll\varepsilon^2$のとき、交流磁場により誘起されたその周波数と同じ周波数で振動している相関関数の部分$\delta C_1(\nu)$は、ＡＴ線に近づいたとき、そのh^2の前の係数は発散的な振舞いをする。しかし、凍結の大きさqも交流磁場により発散的に変化し、非線形応答では両者の発散が相殺されていることがわかる。これに対して、静的磁場Ｈが零のところでは事情は大きく異なる。Ｈの有無によってq_0が有限か否かの違いがポイントで、実際（26）式などで$q_0=0$として$\nu/\Gamma_0\ll\varepsilon^2$で、$\nu\to0,\varepsilon\to0$の極限を考えると、（26）式右辺の第３項の$h^2$の係数は$\varepsilon^{-1}$のように発散し（ＳＫ解）、$\varepsilon^2\ll\nu/\Gamma_0$で$\nu\to0,\varepsilon\to0$の極限では、$|\nu|^{-1/2}$のように発散する。

最後に、（17），（18）式で無視した積分を含む項の効果について一言ふれたい。（17）式での$(9u^2q_0/2)\int(d\omega_1/2\pi)\,C_1(\omega_1)C_1(\omega-\omega_1)$の項は、いままでの計算により求められた$C_1(\omega)$の結果より計算すると、$q_0\ln\varepsilon$に比例する寄与があることがわかる。これは、$q_0$が小さいときには、有効緩和時間$\tau$の発散の仕方を、$\varepsilon^{-1}$から$\varepsilon^{-1-O(q_0)}$のように変化させる効果をもつ。これは、Sommers･Fischer[8]によっても、動的スケーリングの議論により指摘されている。（18）式での$-9u^2q_0\int(d\omega_1/2\pi)\,C_1(\omega_1)\tilde{G}(\omega-\omega_1)$も、揺動散逸定理（（19）式の第２項以下がない式）により同じ効果をもつ。その他の積分を

含む項の効果は、$\Gamma_0 \to \Gamma_0$+const.，$r_0 \to r_0$+const. により吸収される。

３．２）　時間並進対称性をもたない部分

時間並進対称性をもたない部分についても、相関関数では、ＡＴ線に近付けたときに発散的振舞いを示す項が現われるが、応答関数ではそれらが打ち消し合って、発散は現われないことがわかる。尚、この部分から、非線形交流帯磁率の高調波成分の具体的な表式が導出される。

§４．　まとめ

ＡＴ線よりも高温側で、ＳＫ解に基づいて、小さな交流磁場中での相関関数と応答関数を求めた。ＳＫ解に対応して、$\nu/\Gamma_0 \ll \varepsilon^2$を満足するように$\nu\to0, \varepsilon\to0$の極限をとれば、非線形応答はＳＫ解の値となり、ＡＴ線で異常は生じない。一方同じ解析から、相関関数については、交流磁場の周波数と同じ周波数で振動する部分（$\delta C_1(\nu)$）や、交流磁場による凍結の変化（δq）などは、それぞれＡＴ線で異常な振舞いを示すことがわかった。これらは有効緩和時間τの発散に対応している。即ち、ＡＴ線に達すると常磁性相は不安定となりＳＧ相に転移する。その不安定はχ_Rやτの発散を引き起こすが、非線形交流帯磁率については、これらの異常が打ち消し合って、有限なＳＫ解を再現していると理解される。

以上のＳＫ解に基づく議論では、重要なパラメーターは外場の周波数νとＡＴ線からの距離εであり、$\nu/\Gamma_0 \ll \varepsilon^2$を保ちながら静的極限をとった。ＡＴ線よりも高温側では他にパラメーターは無いだろうか。具体的には、低温ＳＧ相で生じるスピンクラスター構造の前駆現象が常磁性相にも出現し得ないかどうかの疑問が残る。これは、ＳＧ相で有限サイズ効果$O(N^{-1}, N^{-2}, \cdots)$まで取り入れられた動的分子場理論が解け、交流磁場とＳＧ相で生じているスピンクラスターがどのように影響し合うかが明らかにされたときに、その高温相への接続を考えることによって、明らかにされるものと思われる。

文献

1) D.Sherrington and S.Kirkpatrick, Phys.Rev.Lett. 35 (1975) 1792.

2) J.R.L.de Almeida and D.J.Thouless, J.Phys.A 11 (1978) 983.

3) A.J.Bray and M.A.Moore, J.Phys.C 12 (1979) L441.

4) H.Sompolinsky and A.Zippelius, Phys.Rev.B 25 (1982) 6860.

5) H.Sompolinsky, Phys.Rev.Lett. 47 (1981) 935.

6) C.De Dominicis, Phys.Rev.B 18 (1978) 4913.

7) T.Shirakura, J.Phys.A 18 (1985) 3475.

8) H.-J.Sommers and K.H.Fischer, Z.Phys.B 58 (1985) 125.