36. 張力によって縮むランダムな系のダイナミクス

名大・工　豊木博泰，本田勝也

面状あるいは線状物体の多体系を統計力学的に考察することはなかなか面倒なものである。しかし，それは多くの物理現象を理解する上で必要になってくる。物質の秩序相における欠陥のダイナミクスなどはその典型例である。最近，転移温度以上から以下へ急冷された系の秩序形成のダイナミクスの研究が盛んに行なわれているが[1]，その過程の後期は，欠陥が消滅していく過程として多くの場合捉えられる。例えば，従来の主な研究対象であった秩序変数がスカラー量の系では，ランダムな界面の運動が本質的な役割を果たすのである。よく知られているように，秩序変数が保存量であるか否かで様相が異なるが，それが非保存量である場合には界面の運動方程式は

$v=\Gamma K$（v：界面の法線方向速度，K：平均曲率）

と比較的簡単になる。ランダムな初期分布をもち，このような方程式に従う界面のダイナミクスの理論は太田，Jasnow，川崎によって提出され[2]，シミュレーションとよく一致する結果が与えられた。そこで用いられた方法は，他の面状あるいは線状の拡がった物体の動的振舞を考察するためにも有用であると考えられる。われわれは，張力によって縮むランダムな糸の系にこの方法を適用し，界面の場合と同様の定式化を行えることを見出したので，そのことについて報告する。

自由エネルギーが面積に比例する界面系，

$F=\int \mathrm{d}\boldsymbol{a}$（$\boldsymbol{a}$ は界面の座標）

と，それが系の長さに比例する糸の系，

$F=\int \mathrm{d}s$（s は糸上の座標）

を考えよう。但し，どちらも3次元空間で考える。両者に対するTDGLタイプの運動方程式を作ると，両者とも

$$\dot{\boldsymbol{r}}=-\Gamma\frac{\delta F}{\delta \boldsymbol{r}}=\Gamma K\boldsymbol{n} \tag{1}$$

となる。但し，$\boldsymbol{r}$ は面片の位置 $\boldsymbol{r}(a)$ が糸片の位置 $\boldsymbol{r}(s)$ の意味であり，K，$\boldsymbol{n}$ はそれぞれ曲率と法線方向の単位ベクトルを表す。ここで，面の曲率とは平均曲率のことをさす。太田らは仮想的な場 $u(\boldsymbol{r}, t)$ を導入し，その節面（$u=0$ を満たす面）が界面を表すものとした。同様な考えを糸の場合に用いて，２つの仮想場 u，v の節面の交線を糸に見たてることにする。これでは，糸環のからみあいは表現できないが，伸びていた糸が縮むプロセスにおいては，からみ合いは重要ではなかろう。

それぞれの節面の運動が (1) を満たすように u，v の運動方程式を作ると次のようになる。

$$\text{界面}：\frac{\partial u}{\partial t}=\Gamma\nabla^2 u-\Gamma\,\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}:\nabla\nabla u, \tag{2}$$

$$\text{糸}\quad：\frac{\partial u}{\partial t}=\Gamma\,\boldsymbol{t}\boldsymbol{t}:\nabla\nabla u, \tag{3}$$

v も同様。

但し，$\boldsymbol{t}$ は糸の接線方向単位ベクトルである。これらに，界面や糸の乱雑さを考慮した近似

$$\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}\simeq\langle\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}\rangle\simeq\frac{1}{3}\overleftrightarrow{\mathrm{I}} \tag{4}$$

$$\boldsymbol{t}\boldsymbol{t}\simeq\langle\boldsymbol{t}\boldsymbol{t}\rangle\simeq\frac{1}{3}\overleftrightarrow{\mathrm{I}} \tag{5}$$

（$\overleftrightarrow{\mathrm{I}}$ は単位テンソル）を施すと

$$\text{界面}：\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{2}{3}\Gamma\nabla^2 u \tag{6}$$

$$\text{糸}\quad：\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{3}\Gamma\nabla^2 u,\quad \frac{\partial v}{\partial t}=\frac{1}{3}\Gamma\nabla^2 v \tag{7}$$

が得られる。このように，張力によって縮む界面や糸は拡散場の節面の運動によって表されるのである。但し，(4)，(5) の近似のために，上記のことは統計的な意味でのみ正しいことを注意しておく。

様々な物理量は仮想場の分布について平均することにより得られる。u，v の平均を $\langle u\rangle=\langle v\rangle=U$ としよう。初期分布がランダムであることを，その２体相関が

$$\mathrm{C}(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|,0)=\langle\delta u(\boldsymbol{r},0)\,\delta u(\boldsymbol{r}',0)\rangle=B\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}),$$

$$\delta u=u-U$$

であると考える。そうすると，時間がたっても分布はガウシアンのままであり，相関長は

$$l(t)=(4\Gamma t)^{1/2} \quad ((6),(7)\text{における数係数}\tfrac{2}{3},\ \tfrac{1}{3}\text{は1とした})$$

で与えられることになる。結果として，物理量はUと2体相関

$$C(r,t)=\langle \delta u(r,t)\,\delta u(0,t)\rangle$$

のみで表されることになるのである。例えば，界面α，面積$A(t)$と糸の長さの時間変化は

$$A(t)\propto t^{-1/2}\,e^{-\gamma_A t^{3/2}} \tag{8}$$

$$L(t)\propto t^{-1}\,e^{-\gamma_L t^{3/2}} \tag{9}$$

$$\gamma_A\propto\gamma_L\propto U^2 \tag{10}$$

と得られる。また，界面や糸の分布の相関関数なども求められ，それらは$U=0$の場合にだけスケーリング則を満たすことがわかっている。 その特性長は$l(t)$で与えられる。詳しいことは，界面については文献2)～4)に，糸については5)に述べられている。

文　献

1) 科研費研究会「相転移における秩序形成過程の動力学」報告集（1986）

2) T. Ohta, D. Jasnow and K. Kawasaki, Phys. Rev. Lett. **49** (1982) 1223.
T. Ohta, Ann. Phys. **158** (1984) 31.

3) H. Toyoki and K. Honda, Phys. Rev. **B33** (1986) 385.

4) H. Tomita, Prog. Theor. Phys. **75** (1986) 482.

5) H. Toyoki and K. Honda, preprint (1986).