31. 非線形応答理論

東大・教養　森　田　昭　雄

非線形領域に於いて強い外部摂動を受けて変化する古典系のダイナミックスを考察し，過渡現象（時間ドメン）と定常現象（振動数ドメン）の関係を明確にする。

分布関数 $f(x, t)$ は次の発展方程式に従うものとする：

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = [\hat{D}_0(x) + \varepsilon p(t) \hat{D}_1(x)] f(x, t) \tag{1}$$

ここで，$\hat{D}_0(x)$，及び $\hat{D}_1(x)$ は各々非摂動，摂動演算子，ε：スモールパラメーター，$p(t)$ は摂動の時間依存を表わす。(1) で

$$f(x, t) = f_0(x) + \varepsilon f_1(x, t) + \varepsilon^2 f_2(x, t) + \cdots \tag{2}$$

とし，非摂動系の遷移確率密度 $g(x, x', t)$ を規格直交関数 $g_n(x)$ で展開して，

$$\hat{D}_0(x)\, g_n(n) = -\lambda_n g_n(x) \tag{3}$$

とすると，

$$\begin{aligned} f_j(x, t) = \iint_{t \geq t_1 \geq \cdots \geq t_j \geq 0} \cdots \int & \mathcal{g}\, \underset{\sim}{D}(t - t_1)\, \underset{\sim}{D}(t_1 - t_2) \\ & \cdots \underset{\sim}{D}(t_{j-2} - t_{j-1})\, \mathcal{f}(t_{j-1} - t_j)\, p(t_1)\, p(t_2) \\ & \cdots p(t_j)\, \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2 \cdots \mathrm{d}t_j \end{aligned} \tag{4}$$

(4) で $\mathcal{g}$ は i 番目の要素を $g_i(x)$ とする行マトリックス，$\mathcal{f}(t)$ は i 番目の要素を

$$\mathrm{e}^{-\lambda_i t} \int g_i^*(x)\, \hat{D}_1(x)\, f_0(x)\, \mathrm{d}x$$

とする列マトリックス，及び $\underset{\sim}{D}(t)$ は i, j 番目の要素を

$$\mathrm{e}^{-\lambda_i t} \int g_i^*(x)\, \hat{D}_1(x)\, g_j(x)\, \mathrm{d}x$$

とするマトリックスで，

$$f_0(x) = \lim_{t\to 0} f(x, t)$$

である。

$t<0$ で，$p(t)=p$ を十分長い間加え，突然 $t=0$ で別の $p(t)=p_0$ の摂動を加えたときの過渡現象の場合，$f(x,t)$ の時間に関するラプラス変換

$$\widetilde{F}(x, s) = \mathscr{L}[f(x, t)]$$

は次のように求まる：

$$\widetilde{F}(x, s) = \frac{1}{s} f_0(x) + \frac{p^2}{p_0}\frac{\mathscr{G}}{s}(\underset{\sim}{E} - p\,\widetilde{\underset{\sim}{D}}(0))^{-1}\,\widetilde{\mathscr{f}}(0)$$

$$+ (p_0 - p)\frac{\mathscr{G}}{s}(\underset{\sim}{E} - p_0\widetilde{\underset{\sim}{D}}(s))^{-1}\,\widetilde{\mathscr{f}}(s)$$

$$+ p\left(1 - \frac{p}{p_0}\right)\frac{\mathscr{G}}{s}(\underset{\sim}{E} - p_0\widetilde{\underset{\sim}{D}}(s))^{-1}(\underset{\sim}{E} - p\,\widetilde{\underset{\sim}{D}}(0))^{-1}\,\widetilde{\mathscr{f}}(0) \qquad (5)$$

ここで，

$$\widetilde{\underset{\sim}{D}}(s) = \mathscr{L}[\underset{\sim}{D}(t)], \quad \widetilde{\mathscr{f}}(s) = \mathscr{L}[\mathscr{f}(t)],$$

$$\widetilde{\underset{\sim}{D}}(0) = \lim_{s\to 0}\widetilde{\underset{\sim}{D}}(s), \quad \widetilde{\mathscr{f}}(0) = \lim_{s\to 0}\widetilde{\mathscr{f}}(s)$$

である。

減衰分布関数（$p_0=0$）のラプラス変換 $\widetilde{F}^{(d)}(x,s)$ は，

$$\widetilde{F}^{(d)}(x, s) = \frac{1}{s} f_0(x) - p\frac{\mathscr{G}}{s}\widetilde{\mathscr{f}}(s)$$

$$+ p\frac{\mathscr{G}}{s}(\underset{\sim}{E} - p\,\widetilde{\underset{\sim}{D}}(s))(\underset{\sim}{E} - p\,\widetilde{\underset{\sim}{D}}(0))^{-1}\,\widetilde{\mathscr{f}}(0) \qquad (6)$$

他方，立ち上り過程（$p=0$）に対する $\widetilde{F}^{(r)}(x,s)$ は

$$\widetilde{F}^{(r)}(x, s) = \frac{1}{s} f_0(x) + p_0\frac{\mathscr{G}}{s}(\underset{\sim}{E} - p_0\widetilde{\underset{\sim}{D}}(s))^{-1}\,\widetilde{\mathscr{f}}(s) \qquad (7)$$

反転パルス（$p_0=-p$）の場合の $\widetilde{F}^{(rev)}(x,s)$ は

$$\widetilde{F}^{(rev)}(x,s)=\frac{1}{s}f_0(x)-p\frac{\mathcal{Y}}{s}(\underset{\sim}{E}-p\widetilde{\underset{\sim}{D}}(0))^{-1}\widetilde{\mathcal{F}}(0)$$

$$-2p\frac{\mathcal{Y}}{s}(\underset{\sim}{E}+p\widetilde{\underset{\sim}{D}}(s))^{-1}\widetilde{\mathcal{F}}(s)$$

$$+2p\frac{\mathcal{Y}}{s}(\underset{\sim}{E}+p\widetilde{\underset{\sim}{D}}(s))^{-1}(\underset{\sim}{E}-p\widetilde{\underset{\sim}{D}}(0))^{-1}\widetilde{\mathcal{F}}(0) \qquad (8)$$

で与えられる。また興味ある過渡現象としては，$p_0=p+p^*$ で，$(p^*/p)\ll 1$ の場合で，

$$\widetilde{F}^{(b)}(x,s)=\frac{1}{s}f_0(x)+p\frac{\mathcal{Y}}{s}(\underset{\sim}{E}-p\widetilde{\underset{\sim}{D}}(0))^{-1}\widetilde{\mathcal{F}}(0)$$

$$+p^*\frac{\mathcal{Y}}{s}\{(\underset{\sim}{E}-p\widetilde{\underset{\sim}{D}}(s))^{-1}\widetilde{\mathcal{F}}(s)-(\underset{\sim}{E}-p\widetilde{\underset{\sim}{D}}(0))^{-1}\widetilde{\mathcal{F}}(0)$$

$$+(\underset{\sim}{E}-p\widetilde{\underset{\sim}{D}}(s))^{-1}(\underset{\sim}{E}-p\widetilde{\underset{\sim}{D}}(0))^{-1}\widetilde{\mathcal{F}}(0)\} \qquad (9)$$

である。また，

$$p(t)=p_1+p^*\cos\omega t\ \ ((p^*/p_1)\ll 1)$$

で定常状態に到達した時の分布関数 $f^{(\infty)}(x,t)$ は

$$f^{(\infty)}(x,t)=f_0(x)+\mathcal{Y}p_1(\underset{\sim}{E}-p_1\widetilde{\underset{\sim}{D}}(0))^{-1}\widetilde{\mathcal{F}}(0)$$

$$+\frac{1}{2}p^*\mathcal{Y}\{[(\underset{\sim}{E}-p_1\widetilde{\underset{\sim}{D}}(i\omega))^{-1}(\underset{\sim}{E}-p_1\widetilde{\underset{\sim}{D}}(0))^{-1}\widetilde{\mathcal{F}}(0)$$

$$-(\underset{\sim}{E}-p_1\widetilde{\underset{\sim}{D}}(0))^{-1}\widetilde{\mathcal{F}}(0)+(\underset{\sim}{E}-p_1\widetilde{\underset{\sim}{D}}(i\omega))^{-1}\widetilde{\mathcal{F}}(i\omega)]\,e^{i\omega t}$$

$$+\mathrm{c.c.}\} \qquad (10)$$

となる。ここで c.c. は複素共役を意味する。(9) 式と比較することにより，(10) はその振動数ドメンに相当することが解る。 Ullman はこの振動数ドメンの実験を (7) の立ち上り過程のラプラス変換と p^* に関して線形応答理論を通じて関連づけたが，(9) と (10) より彼のスペキュレーションは間違いであることが解る。

本研究の詳細及びここで記さなかった他の結果については，Phys. Rev. **A 33** (8月号) (1986) 及び投稿予定の論文を参照されたい。