

- 1) Y. Yamazaki, A. Holz, M. Ochiai & Y. Fukuda, J. Stat. Phys. **41** 497 (1985)  
 Y. Yamazaki, A. Holz, M. Ochiai & Y. Fukuda, Phys. Rev. **B33** 3460 (1986)  
 Y. Yamazaki, M. Ochiai, A. Holz & Y. Fukuda, Phys. Rev. **B33** 3472 (1986)
- 2) Y. Yamazaki, Y. Fukuda, A. Holz & M. Ochiai Physica A (1986)
- 3) Y. Yamazaki, Y. Fukuda & M. Ochiai, (in preparation)

## 20. 3次元非一様MHDプラズマにおける 多次元ソリトンの自己形成

名大・理 戸 次 直 明

### § 1. 序論

完全可積分系であるソリトン系に散逸と外力の項等の非可積分項が加わった場合（摂動が小さい時）、ソリトンは空間的な構造は安定で時間的にはカオティックに振舞うことが、最近、明らかになってきた<sup>1)</sup>。一方、小さな抵抗だけを含む3次元一様MHDプラズマ中における磁場の自己形成過程が数値的に調べられている<sup>2)</sup>。これは、エネルギー緩和過程における3次元磁場の自己形成のダイナミックスをシミュレートした興味のある計算結果である。しかしながら、自然界には本来、非一様性や抵抗等による小さいけれど無視できない不安定性が存在する。したがって、不安定性と散逸とを含んだ系をモデルとして、3次元シミュレーションを実行することは、より現実的な立場で現象を説明することに役立つものと思われる。実際、核融合研究の基本的で重要な問題の一つに、閉じ込め磁場を横切って逃げるプラズマの損失の問題がある。密度勾配のあるプラズマの周辺部の振舞いは、このプラズマの異常損失の問題と密接に関係している。もし、周辺プラズマ中に、静電ポテンシャルや密度揺動などの多次元的なソリトンあるいは対流胞モードなどが自己形成する可能性があれば、この多次元ソリトンはプラズマの輸送に重要な役割を果たすであろう。従って、周辺プラズマを記述する適確なモデルを用いて、多次元ソリトンが果して自己形成できるかどうかを調べることは、非常に興味のもてる問題の一つであろう。ここでは、3次元遷減MHD方程式<sup>3)~5)</sup>を周期境界条件のもとに初期値問題として、初期パルスの擾乱がどのように非線形発展し、どのように伝播するかを数値的に調べた結果について報告する。

§ 2. 一般化された逡減 MHD 方程式

理想 MHD 方程式に関連した仕事は非常に多く、解析的なアプローチも不可能ではない。しかし、抵抗性 MHD 方程式となるとかなり難かしくなる。更に、密度勾配のある抵抗性 MHD 方程式を解析的に解くのは不可能である。密度勾配のある磁化プラズマ周辺部における低周波 ( $\omega \ll \Omega_i$ ,  $\Omega_i$  はイオンのサイクロトロン周波数) の波動の非線形伝播を記述する方程式は、トカマク・プラズマ等における典型的な無次元化<sup>3)</sup>をして、静電ポテンシャルを  $\phi$ , 無擾動磁場 (大きさ  $B_0$ ) の方向 ( $z$  方向) に平行なベクトルポテンシャルを  $A$ , 密度揺動を  $n_1$  とし

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta_{\perp} \phi = - \{ \phi, \Delta_{\perp} \phi \} - \nabla_{\parallel} J + \{ A, J \}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} A = \eta J - \kappa \frac{\partial A}{\partial y} + \nabla_{\parallel} (n_1 - \phi) - \{ A, n_1 - \phi \}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} n_1 = d_c \Delta_{\perp} n_1 - \kappa \frac{\partial \phi}{\partial y} - \{ \phi, n_1 \} - \nabla_{\parallel} J + \{ A, J \}, \quad (3)$$

と書ける<sup>3)~5)</sup>。ここで、時間・空間については、 $\Omega_i t \rightarrow t$ ,  $\rho_s \nabla_{\perp} \rightarrow \nabla_{\perp}$ ,  $v_A / \Omega_i \nabla_{\parallel} \rightarrow \nabla_{\parallel}$  のように無次元化し、 $v_A$  はアルフヴェン速度、 $\rho_s$  は実効的なイオンのラーモア半径、 $J = \Delta_{\perp} A$ ,  $\Delta_{\perp} \equiv \partial_x^2 + \partial_y^2$ ,  $\{ f, g \} \equiv (\partial f / \partial x)(\partial g / \partial y) - (\partial f / \partial y)(\partial g / \partial x)$ ,  $\eta$  は抵抗、 $\kappa$  は非一様性の代表的スケール長 (オーダーは無次元化されているので 1),  $d_c$  は磁場を横切る拡散係数である。式(1)~(3)より、表面積分の寄与を無視すると、

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \Gamma_x - \int (\eta J^2 + d_c |\nabla_{\perp} n_1|^2) d^3 x, \quad (4)$$

$$E = \frac{1}{2} (E_1 + E_2 + E_3), \quad (5)$$

$$E_1 = \int n_1^2 d^3 x, \quad E_2 = \int |\nabla_{\perp} \phi|^2 d^3 x, \quad E_3 = \int |\nabla_{\perp} A|^2 d^3 x,$$

$$\Gamma_x = \int \frac{d \ln n_0(x)}{dx} n_1 \frac{\partial \phi}{\partial y} d^3 x, \quad (n_0(x) = e^{-\kappa x})$$

を得る。もし、密度勾配、抵抗、拡散がなければ、式(4)より全エネルギーが保存されることがわかる。 $\Gamma_x$  は  $x$  方向へのプラズマの流れに対応する輸送量を表わしている。

## § 3. 線形分散関係式

線形分散関係式は、摂動部分を

$$(\phi, A, n_1) \propto \exp [i \mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp + i k_z z - i \omega t]$$

と仮定して、式(1)~(3)に代入して、

$$\begin{aligned} & \omega^3 + \{-\omega^* + i(\eta + d_c) k_\perp^2\} \omega^2 \\ & - [(1 + k_\perp^2) k_z^2 + \eta d_c \cdot k_\perp^4 + i \omega^* d_c k_\perp^2] \omega + k_z^2 \cdot \omega^* \\ & - i d_c \cdot k_z^2 k_\perp^2 = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

となる。ここで、 $\omega^* = \kappa k_y$  はドリフト波の周波数である。周辺プラズマの代表的な値として、 $n_0 \sim 10^{14} (\text{cm}^{-3})$ 、 $B_0 \sim \text{数 KG}$ 、 $T_e \sim 25 (\text{eV})^6)$  を仮定すると、 $v_A \sim 10^7 (\text{cm/s})$ 、 $c_s = \sqrt{T_e/m_i} \sim 10^6 (\text{cm/s})$ 、 $\beta/2 = (c_s/v_A)^2 \sim 10^{-2} \ll 1$ 、 $\Omega_i \sim 10^7 (\text{Hz})$ 、 $\rho_s = 0.1 \sim 0.5 (\text{cm})$  になる。このとき、式(6)より、最大成長率  $r_k$  は、長波長領域で、 $r_k \sim 10^{-2}$  になる。一方、 $\beta \rightarrow 0$  の極限では、式(2)より

$$\nabla_{\parallel} J = -\frac{1}{\eta} \nabla_{\parallel}^2 (n_1 - \phi)$$

となり、式(1)と(3)は、次のように書き直すことができる。即ち

$$\frac{\partial}{\partial t} A_{\perp} \phi = -\{\phi, A_{\perp} \phi\} + \frac{1}{\eta} \nabla_{\parallel}^2 (n_1 - \phi), \quad (1')$$

$$\frac{\partial}{\partial t} n_1 = -\{\phi, n_1\} - \kappa \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{1}{\eta} \nabla_{\parallel}^2 (n_1 - \phi) + d_c A_{\perp} n_1, \quad (3')$$

を得る。式(1)'と(3)'の線形分散関係式は、

$$\omega^2 + i \left( \frac{k_z^2}{\eta} + \frac{k_z^2}{\eta k_\perp^2} + d_c \cdot k_\perp^2 \right) \omega - \frac{k_z^2}{\eta} - i \omega^* \frac{k_z^2}{\eta k_\perp^2} = 0, \quad (7)$$

となる。式(7)は、 $k_z \rightarrow 0$  のとき、

$$\omega(\omega + i d_c \cdot k_\perp^2) = 0, \quad (7')$$

で、 $\text{Im} \omega = -d_c k_\perp^2 < 0$ 、かつ  $\text{Re} \omega = 0$  となる。このモードを対流胞モードと呼ぶ。このモードは、最初、粒子シミュレーションによって観測された<sup>7)</sup>。また、式(1)'と(3)'を使って、

対流胞の励起のメカニズムが、Bekki<sup>8)</sup>によって調べられた。対流胞の励起は、非線形モード結合によって発生する。 $k_z \rightarrow 0$  のとき、式(1)'は、非粘性の極限における2次元のナビエ・ストークス方程式を表わしている。従って、周辺プラズマ乱流を記述するモデルとして、式(1)~(3)を考えると、2次元ナビエ・ストークス乱流のエネルギースペクトルの逆カスケードの性質をもつこと等が期待できるが、ここでは、論じない。

#### § 4. 数値計算例

エイリアス・エラーを除くため、 $x-y$  平面に関しては、efficient truncation スキーム<sup>9)</sup>、磁力線方向に関しては、差分法を使った。初期条件は、

$$\begin{aligned} \phi_{k_{\perp}}(k_x, k_y, z) &= a k_{\perp}^2 e^{-bk^2} \cos k_z z \\ &= A_k = n_{1k} \end{aligned} \quad (8)$$

として与えた。ただし、 $k_z = 0.1$ ,  $a, b$  は定数である。典型的な空間分解能は  $32 \times 32 \times 8$ ,  $-3 < k_x, k_y < 3$ ,  $-0.3 < k_z < 0.3$  で、シミュレーション箱の大きさ ( $L_x, L_y, L_z$ ) は、 $L_x = L_y = 10\pi$  ( $\sim 5$  cm),  $L_z = 20\pi$  ( $\sim 60$  cm) とした。数値的誤差は、エネルギー保存則、式(4)を使ってチェックし、数パーセント内に保った。図1に示されているように、最初エネルギー  $E(t)$  は、不安定性によって増大し、やがて、不安定モードのエネルギーは、3次元非線形モード結合による対流胞のモードのエネルギー等に分配され、不安定性と散逸とがバランスした時刻 ( $t \sim 50$ ) ぐらいで、サチュレーションが起きていることがわかる。このレベル、 $E_s$  は、初期条件にあまり敏感でないので、この  $E_s$  を自己形成した状態とみなせるであろう。そして、 $\eta$  と  $d_c$  を固定すれば、 $E_s$  は  $\kappa$  に比例していることがわかる(図2)。また、 $\Gamma_x$  も  $\kappa$  に比例していることがわかった。図3は、 $z$  を固定して、静電ポテンシャルの等高線の非線形発展を示したものである。時刻  $t \gtrsim 70$  ぐらいから、ソリトンと呼べるような、空間的にコヒーレントな構造が自己形成されていることがわかる。

式(1)~(3)は、 $\beta \rightarrow 0$  の極限で、逡減摂動法を使って、非線形シュレディンガー方程式のタイプに帰着できる<sup>10)</sup>。従って、もしソリトンのようなコヒーレント構造をもつものが存在するとすれば、包絡ソリトンのようなものである可能性が強い。図4は、図1の場合にくらべて、 $d_c$  がやや大きい場合で、 $E_s \sim O(1)$ ,  $t \gtrsim 50$  のとき、 $\max \phi(y) \times$  半巾巾に一定のレベルをもつことを示している。ただし、 $\phi$  が最大値をもつときの空間座標を  $(x^*, y^*, z^*)$  としたとき、 $x^*$  と  $z^*$  を固定した  $\phi$ , 即ち、 $\phi(y) = \phi(x^*, y, z^*)$  とする。もし、 $\phi(y)$  が、一

次元の包絡ソリトンであれば、  
 $\max \phi(y) \times \text{半値巾}$  は一定になる。  
 従って、一般に、 $x$  と  $z$  方向の伝播  
 も含めて、この  $\phi(y)$  は多次元ソリ  
 トンと呼べるであろう。ここでは、  
 自己形成した  $\phi(y)$  のことを、楽観  
 的に、多次元ソリトンと呼ぶことに  
 する。このソリトンは、もし、周辺  
 プラズマで観測できるとすれば、そ  
 のサイズは、 $\delta x \sim 0.5 \text{ cm}$ ,  $\delta y \sim$   
 $2 \text{ cm}$ ,  $\delta z \sim 20 \text{ cm}$  ぐらいのものに  
 なるであろう。きしめんソリトン  
 と呼べるかもしれない。

この研究は (名大・工) 金田行雄  
 氏との共同研究によっている。

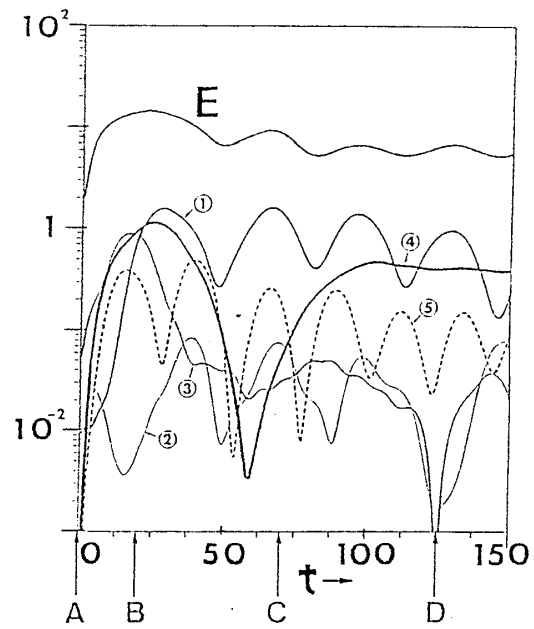


Fig.1 Time evolution of the total energy, Eq. (5), and the energy of different Fourier mode  $\vec{k}=(l,m,n)$ .  $E = \sum_{\vec{k}} E(l,m,n)$ .  $\kappa=2$ ,  $\eta=0.033$ ,  $c_c=0.3$ ,  $\mu=0$ ,  $A=2$ ,  $B=5$  are employed. Symbols ①, ②, ③, ④ and ⑤ denote (0,1,1), (0,2,1), (1,1,1), (1,1,0) and (1,1,2) modes, respectively.

図 1

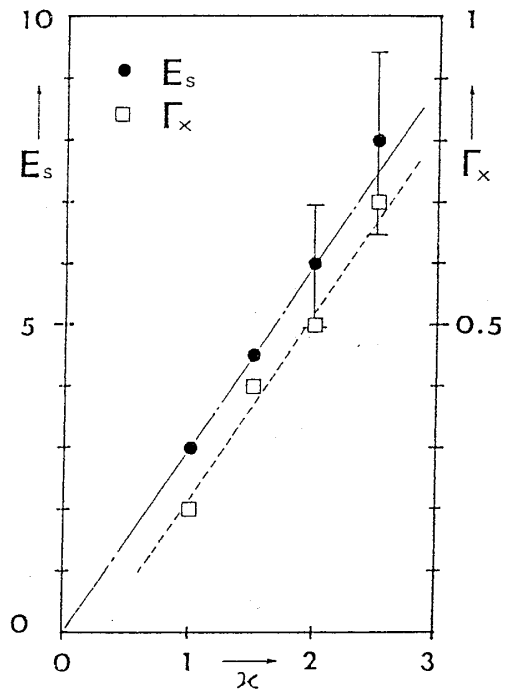


Fig.2 Dependency of  $E_s$  and  $\Gamma_x$  on  $\kappa$  for  $\eta=0.033$ ,  $c_c=0.3$ ,  $\mu=0$ ,  $A=2$ ,  $B=5$ .

図 2

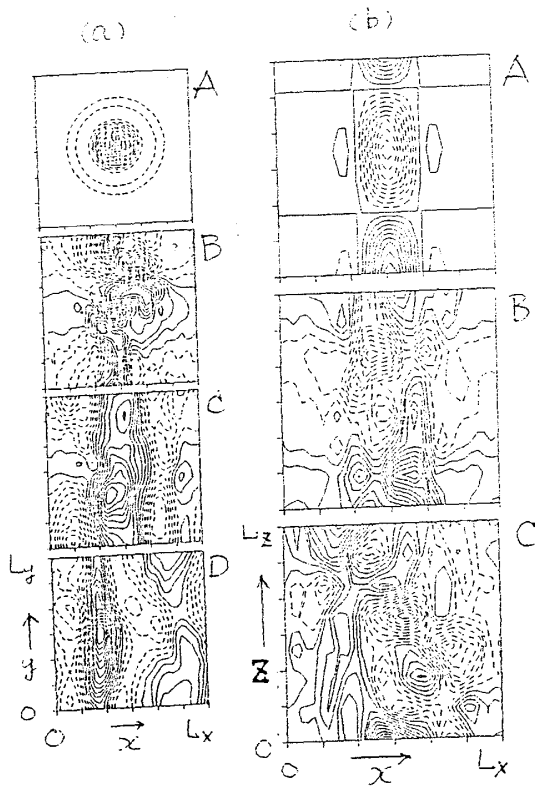


Fig.3(a) The potential contour  $\phi(x, y, z=0)$ . A ( $t=0$ ), B ( $t=20$ ), C ( $t=70$ ), D ( $t=125$ ), respectively. Solid lines indicate  $\phi(x, y, 0) \geq 0$ , broken lines  $\phi(x, y, 0) < 0$ . The parameters are the same as Fig.1.

Fig.3(b) The potential contour  $\phi(x, L_z/2, z)$ .

図 3

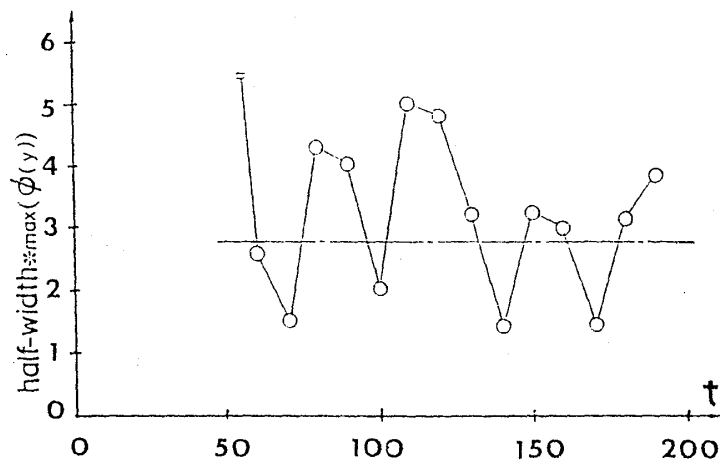


Fig.4 Product of half-width and maximum amplitude of  $\phi(y)$  for the fixed  $x$  and  $z$  versus  $t$  at  $E_1 \sim O(1)$ .

図 4

文 献

- 1) K. Nozaki and N. Bekki, *J. Phys. Soc. Jpn.* **54**, 2363 (1985).
- 2) R. Horiuchi and T. Sato, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 211 (1985).
- 3) A. Hasegawa and M. Wakatani, *Phys. Fluids* **26**, 2770 (1983).
- 4) R. D. Hazeltine, *Phys. Fluids* **26**, 3242 (1983).
- 5) R. E. Waltz, *Phys. Fluids* **28**, 577 (1985).
- 6) S. J. Zweben and R. W. Gould, *Nucl. Fusion* **123**, 1625 (1983).
- 7) C. Z. Cheng and H. Okuda, *Phys. Rev. Lett.* **38**, 708 (1977).
- 8) N. Bekki, *J. Phys. Soc. Jpn.* **52**, 2736 (1983).
- 9) G. S. Patterson and S. A. Orszag, *Phys. Fluids* **14**, 2538 (1971).
- 10) K. Nozaki, T. Taniuti and K. Watanabe, *J. Phys. Soc. Jpn.* **46**, 991 (1979).