

Title	5.破壊のモデルとくり込み群を使ったラプラス方程式のマルチグリッド解法(パターン形成の運動及び統計,研究会報告)
Author(s)	伊東, 敬祐; 高安, 秀樹
Citation	物性研究 (1986), 46(6): 823-828
Issue Date	1986-09-20
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/92310">http://hdl.handle.net/2433/92310</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

## 参考文献

- 1) 高安秀樹, 西川郁子, 「樹枝状流れの形式」ながれ, 掲載予定
- 2) 高安秀樹, 『フラクタル』朝倉書店, 1986
- 3) H. Takayasu, Phys. Rev. Lett. **54** (1985), 1099 (放電).
- 4) H. Takayasu, Prog. Theor. Phys. **74** (1985), 1343 (破壊).
- 5) H. Takayasu, in “*Fractals in Physics*” Elsevier Science Publishers B. V. (1986), 181 (放電と破壊).
- 6) H. Takayasu, I. Nishikawa, *Proceedings of ‘Science on Form’* ed. by S. Ishizaka, to appear (川と血管).

## 5. 破壊のモデルとくり込み群を使った ラプラス方程式のマルチグリッド解法

神戸大・理 伊東敬祐, 高安秀樹

放電破壊, ぜい性破壊, Viscous fingering, DLA など, フラクタルなパターンを作る種々の現象が, 流れ  $J = \sigma \nabla u$  のパラメター  $\sigma$  の非線形的性質と, 流れの保存  $\nabla J = 0$  とに基く共通のモデルで表現される (Takayasu, 1986)。この方程式  $\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0$  を高速に解くことができれば,  $\sigma$  の非線形性を種々変えた時, 境界条件を変えた時, 又は空間の次元を変えた時, どのようなパターンが変化するかをいろいろと調べることができて便利である。

一方, 破壊について, 「閾値を越せば破壊」という現象方程式でなく, もっと破壊の本質を表現する式は作れないものだろうか。そのためには, 滑らかさを条件とする微分方程式から離れて, むしろ素朴に現象を眺めた方が良いように思える。「無限・カオス・ゆらぎ」(寺本ら 1985)の中で, 山口はポアソン方程式という最も潰らかな解を持つ微分方程式と, 高木関数といういたる所で微分不可能な関数との奇妙な深い関係を語っている。破壊のもとの場が先に述べたラプラス方程式(より一般的にはポアソン方程式)で現わされることと, 破壊とは滑らかな場の中に微分不可能な特異な場所ができることだということを併せ考えると, 山口によるポアソン方程式の差分表現は破壊の本質を表現しているように見える。

それはさておき, Hata & Yamaguti (1984)による高木関数の一般化である Takagi series は, その表現がそのままポアソン方程式を計算機で解くための巧妙なアルゴリズムにな

っている。例えば、一次元のディリクレ境界 ( $f(0) = f(1) = 0$ ) のポアソン方程式,  $\nabla^2 f + 2c = 0$ , の解は, いかなる  $k (\geq 0)$  についても

$$f\left(\frac{2i+1}{2^{k+1}}\right) = \frac{1}{2} \left\{ f\left(\frac{i}{2^k}\right) + f\left(\frac{i+1}{2^k}\right) \right\} + c_i^k, \quad (1)$$

を満足する。ここで,  $i = 0, 1, \dots, 2^k - 1$ .  $c_i^k$  は  $i$  によらず,  $c_i^k = c/4^{k+1}$  である。このことは図解すると更にわかり易い (図 1 a)。この表現の物理的意味は, 前に述べた対談集 (寺本ら, 1985) の中で, 広田が語っているので参照されたい。ちなみに  $c_i^k = 1/2^{k+1}$  とすると,  $k \rightarrow \infty$  で  $f(x)$  はいたる所で微分不可能な高木関数である (図 1 b)。(1)式によれば, 空間を

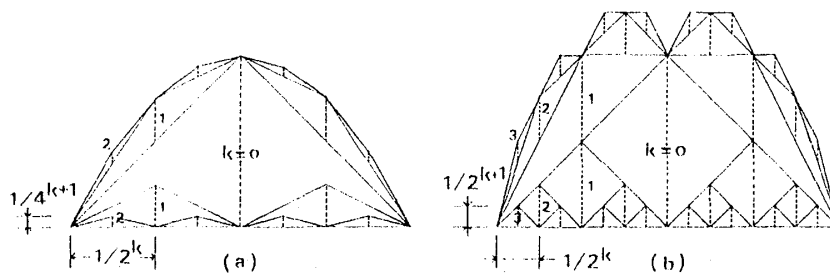


図 1

$2^k$  分割した時のポアソン方程式の差分解がわかっているならば, それを使って  $2^{k+1}$  分割した時の差分解が求められる。

(1)式が持っている上記の性質は, 偏微分方程式を解くのに使われている multigrid 法 (Brandt, 1980) のアルゴリズムそのものである。Multigrid 法の特徴は, 偏微分方程式を解くのに, 粗いグリッドを使った粗い近似から, 細かいグリッドを使ったより精密な近似へと解き進む点にある。微分方程式の通常の解法が, 局所的な所で微分方程式の真の解にあわせようとするのに対して, マルチグリッド法は大域的な所であわせておいて, それを細密化してゆく。このことと, コッホ曲線などのフラクタル図形を作る時の操作とを比べて見れば, マルチグリッド法がフラクタルなパターンの数学モデルの解法として極めて適していることが直観的に予想できよう。更に, この微視化の操作が, 実空間のくり込み群の操作が行なう粗視化と対をなしていることからして, くり込み群の手法がすなおにマルチグリッド法のアルゴリズムに融和することも予想できよう。しかも, 一般のマルチグリッド法が数値解法のテクニックであるのに対して, Hata & Yamaguti (1984) に基く(1)式は, ポアソン方程式が近似している物理現象そのものの数学的表現であるという点で, 高速解法の技巧にとどまらず, その物理現象についての新しい解釈を導き出す可能性も秘めている。

以下に,  $\nabla \cdot (G \nabla u) = 0$  を解くアルゴリズム (RGMG 法, renormalization group multigrid method と略記する) を説明する。  $G$  が一定の場合の基礎的なことからは, 別論

文として準備中である (Ito & Yamaguti)。簡単のために正方形の領域を考える。周囲に境界条件が与えられ、 $G$  は非一様に分布している。数値的には差分法で解くわけで、差分のための分割は任意で、その粗さに応じた近似解をわれわれは  $\nabla \cdot (G \nabla u) = 0$  の解としている。RGMG 法の特色は、(1)粗い分割での近似解をより細かい分割での (より真の解に近い) 近似解を求めるための初期値に用いる。(2)粗い分割での近似解を求める時に使う粗視化されたパラメータ  $G$  を、くり込み群の手法で求める、の 2 点である。

分割は  $2^m \times 2^m$  ( $m = 1, 2, \dots, n$ ) の正方形のメッシュとし、分割の粗さは  $m$  で変える。この時、 $\nabla \cdot (G \nabla u) = 0$  を解くことは、この正方形格子の各ボンドに  $G$  を電気伝導度 (=  $1/\text{抵抗}$ ) として与えた電気回路について、各サイトの電位を求めることに等しい。 $2^n \times 2^n$  のグリッドの各ボンドに  $G = 1/R$  を与え、周辺のサイトに境界条件を与えて、この回路を解こう。

最初に、分布定数  $G$  の粗視化 ( $m = n \rightarrow n-1 \rightarrow \dots \rightarrow 2 \rightarrow 1$ ) を行う。粗視化のためのくり込み群のルールは、いろいろのルールが考えられる。最も単純なのは、図 2a の AB 間の最短経路を作る 2 つのボンドの抵抗の和をもって粗視化したボンド A'B' 間 (図 2b) の抵抗とするルールであるが、これは単純過ぎ

る。次に、構成ボンドの数が 4 の経路までを考慮することになると、図 2c のような田の字形の回路網が抜き出される。この場合でも、

簡単なのはボンドに重みをつけて、例えば、RX2, RX5 には重み 1 を、その他には重み  $1/2$  をかけて、その和をもって A'B' 間の抵抗とする方法がある。ここではもう一歩進めて、図 2c の回路を解いて得られる AB 間の抵抗をもって、A'B' 間の抵抗とする。粗視

化のルールをより精巧にするには、構成ボンドの数を 6 迄上げれば良いが、いたずらに計算量がふえる。粗視化をどこまで精密にするかは、それによって、次に述べる微視化の際の計算がどれだけ軽減されるかにかかっている。経験的には、構成ボンド数 4 以下の田の字形 (2 次元) 及び直交田の字形 (3 次元、図 2d) で十分である。

$2 \times 2$  の最も粗い格子まで粗視化を進めたならば、次にマルチグリッドの微視化のステップ

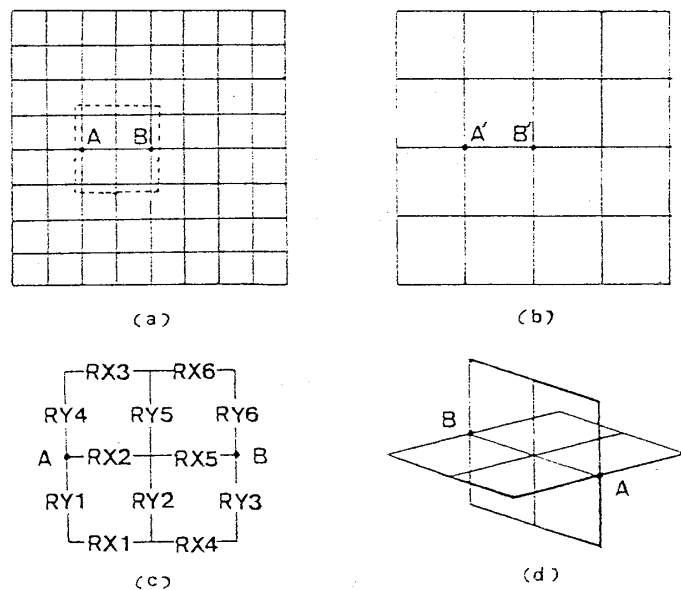


図 2

に入る。その時、表現上の便宜のために、すべての  $R$  を  $G = 1/R$  の関係で  $G$  に直しておく。微視化の方法を図 3 にそって具体的に説明しよう。  $m = 1$  のグリッドについて求めるべき点は中央のサイトのみで、これは標準的な 5 点近似式

$$u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \{GX1 \cdot u\left(0, \frac{1}{2}\right) + GX2 \cdot u\left(1, \frac{1}{2}\right) + GY1 \cdot u\left(\frac{1}{2}, 0\right) + GY2 \cdot u\left(\frac{1}{2}, 1\right)\} / (GX1 + GX2 + GY1 + GY2) \quad (2)$$

で求められる(図 3 a)。次にこれをもとにして、  $m = 2$  のグリッドの計算に進む。この時、細かいグリッド上の値を粗いグリッド上の既知の点の値から直線補間で求めて、それを細かいグリッドの初期値にして、relaxation iteration で細かいグリッドを解くことも考えられるが、これでは補間の近似が悪くて収束が遅い。補間の近似を単純な計算で良くするのに、(1)式が使える。(1)式の  $c_i^k$  を除いた部分は、ラプラシアン

の標準的差分化である 3 点近似式になっている点に注目する。(1)式は一次元では厳密に成り立つが、2次元では一般的には成り立たない。ただし、(1)式によれば  $c_i^{k+1} / c_i^k = 1/4$  だから、この関係は2次元でも局所的に近似的に成り立つと想定して、  $m = k$  のグリッド上の  $u$  の値から  $c_i^k$  を求め、その近傍では  $m = k+1$  のグリッドについて  $c_i^{k+1} = c_i^k / 4$  と仮定する。即ち、図 3 b で

$$CX1 = u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - \{GX1 \cdot u\left(0, \frac{1}{2}\right) + GX2 \cdot u\left(1, \frac{1}{2}\right)\} / (GX1 + GX2) \quad (3)$$

により  $c_i^1$  を求め、  $CX2 = CX3 = CX1/4$  により  $c_i^2$  を内挿する(図 3 c)。  $m = 2$  のグリッド上の点の値は、今求めた  $c_i^2$  を使って、例えば

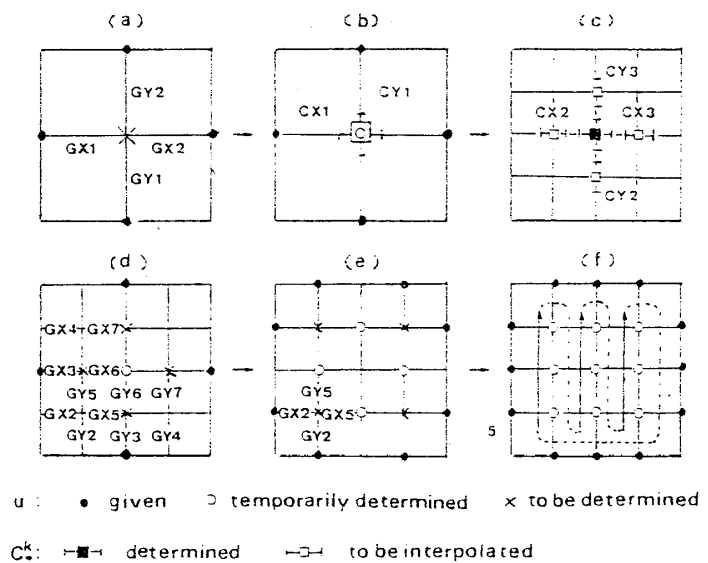


図 3

$$u\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \{GX3 \cdot u\left(0, \frac{1}{2}\right) + GX6 \cdot u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\} / (GX3 + GX6) + CX2 \quad (4)$$

の形の3点近似式で図3dのX点を求め、次いで例えば

$$u\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = \{GX2 \cdot u\left(0, \frac{1}{4}\right) + GX5 \cdot u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) + GY2 \cdot u\left(\frac{1}{4}, 0\right) + GY5 \cdot u\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)\} / (GX2 + GX5 + GY2 + GY5) \quad (5)$$

の形の5点近似式で図3eのX点をきめる。これで $m=2$ のグリッド上の各点は求まったが、これは第一近似なので、この値を初期値として、5点近似式を使った relaxation iteration を図3fのようにくり返して、この粗さのグリッドでの差分解に収束させる。収束したならば、 $m=3$ のグリッドに進み、同じことをくり返して $m=n$ の最も細かいグリッドを解いて計算が終る。以上をフローチャートにしたのが図4である。

破壊モデルとしては、求めた $u$ について、破壊の条件を満たしているボンドを探し、あればそのボンドの $G=1/R$ を約束によって変化させ、新しい $R$ の分布に対して $R$ の粗視化から再び計算し直して、破壊の進行を見る。 $R$ が不連続的に変化すると、その影響はかなり広範囲に及ぶので、破壊前の $u$ の値を初期値にして relaxation iteration をくり返しても収束が悪く、RGMG法で前の値は使わずに $R$ の粗視化からやり直した方が速い。勿論、粗視化を $2 \times 2$ のグリッドまでやり直さずに必要なレベルでとどめて前の値を部分的に使ったり、微視化も必要な所についてだけ細かいグリッドを使うなどの工夫で、計算時間の短縮は更にできるだろう。3次元についても全く同じ手法が使えるが、計算機の記憶容量でグリッドの細かさが抑えられてしまう。

この計算法は $\nabla \cdot (G \nabla u) + C = 0$ の形の方程式に使える。 $C=0$ について説明したが $C \neq 0$ で非一様分布して

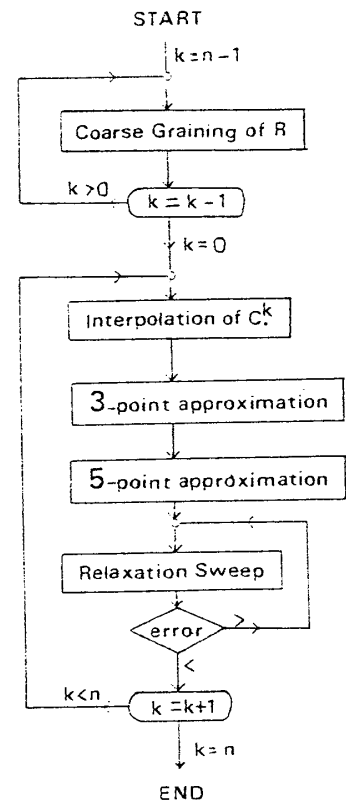


図 4

いても構わない。境界条件も正方形の周囲である必要はない。更には、どの程度広い範囲の形の偏微分方程式の高速解法として有効であるか、時間発展の場合は明らかに不利益があるのでどのように改良できるか、 $c^{k+1}/c^k = 1/4$  という滑らかさの条件を外したらどうなるかなどを今後検討してゆくつもりである。

## 参 考 文 献

A. Brandt; AIAA Jour. 18 (1980) 1165.

M. Hata and M. Yamaguti; Japan J. Appl. Math. 1 (1984) 183.

H. Takayasu; in *Fractals in Physics*, ed. by L. Pietronero and E. Tosatti, Elsevier (1986) 181.

寺本, 広田, 武者, 山口, 無限・カオス・ゆらぎ. 培風館(1985)。

## 6. 自己組織神経場の理論

東大・工 甘 利 俊 一

脳は神経場を用いて並列の情報処理を行っている。すなわち、神経場における興奮パターンのダイナミクスを通じて情報を処理する。一方、こうした情報処理のプログラムは、神経結合の強度を変更する自己組織によって行なうことになる。ここでは、外界の信号を受容しながら、その情報構造を神経場の内部に自動的に表現する自己組織神経場の動作を、簡単なモデルを用いて数理的に解析する。

神経場  $F$  を考え、場の内部に位置座標  $\xi$  をとる。  $u(\xi, t)$  を場所  $\xi$  にある神経細胞の時間  $t$  における平均膜電位とする。場の内部での神経間の相互結合は、場所  $\xi$  にある神経の出力信号が場所  $\xi'$  にある神経に入力するときの結合強度  $w(\xi, \xi')$  で表わされるものとする。

$w$  は相互抑制形の一様等方性を持つもの、すなわち  $w(\xi, \xi') = w(|\xi - \xi'|)$  で、  $w(|\xi|)$  は  $\xi$  が小さいところで正、大きいところでは負と仮定する。場所  $\xi$  にある神経に外部から入る入力刺激の荷重和を  $S(\xi)$  とすれば、場の興奮力学の方程式は

$$\tau \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial t} = -u(\xi, t) + w * f(u) + S(\xi) \quad (1)$$

のように書ける。ここで  $z(\xi, t) = f[u(\xi, t)]$  は平均膜電位が  $u$  のときの神経の出力パルスの強度(頻度)で  $f$  は非線形の単調増加関数、