研究会報告

AB効果とホモトピー群

明星大・理工　関 根 克 彦

1. はじめに

AB効果は，実験によると，電子が動きまわれる空間の領域が単連結でないときにおこっている。

ところで，空間が単連結か単連結でないかを議論するときに問題になるのは，ホモトピー群（基本群）である。

以下，電子の configuration space を M であらわし，典型的な例として，次の2つの場合を念頭において考える。

Case A：$M=\boldsymbol{R}^3$（単連結）

Case B：$M=\boldsymbol{R}^3-K$（単連結でない）

ただし K は，z 軸を軸とする無限に長い円筒で，M はその外側の領域である。

2. ホモトピー群と閉曲線の分類

M の1点 x を決めて，x を基点とする M の（1次の）ホモトピー群を，$\pi_1(M, x)$ であらわす。x から出て x にもどってくる閉曲線の分類をおこなう。

Case B では，この閉曲線は，z 軸をまわった回数 n（正負の整数または0）で分類できる。この n が等しい2つの閉曲線は，空間 M のなかで，連続変形によって一方を他方に変えることができる。このような2つの閉曲線は equivalent であるとして，閉曲線の equivalent class を考える。これをホモトピー類という。

このホモトピー類の集合は群をつくる。これがホモトピー群 $\pi_1(M, x)$ である。

この群の元である一つ一つのホモトピー類は，整数 n と一対一に対応しているから，この場合のホモトピー群は，整数全体がつくる加法群 $\boldsymbol{Z}$ と同形である：

$$\text{Case B では,}\quad \pi_1(M, x)\cong \boldsymbol{Z}$$

ここで x は，M のどの点であってもよい。

一般に，空間 M の別の点を y とした場合，x から y へいく道が存在すれば $\pi_1(M, x)$ と $\pi_1(M, y)$ は同形であることが証明できる。いまの場合（Case B），M の任意の2点 x と y にたいして，x から y へいく道が存在する。このことを，M は path connected であるという。

Case A では，M は path connectd であり，また simply connected（単連結）である。これは，M のすべての閉曲線が，M のなかで，連続変形によって1点に縮められるということである。したがって，x から出て x へもどる閉曲線のホモトピー類は，ただ一つしかない。この場合，ホモトピー群 $\pi_1(M,$

x ）はただ一つの元から成る群である。そのただ一つの元は当然，この群の単位元である。加法群として考えた場合，単位元は０と書かれ，またこの０だけから成る群も０と書かれる。結局，

Case A では，　$\pi_1(M,\ x) = 0$

3. コホモロジー群とベクトル・ポテンシャルの分類

ここでは，パラコンパクトな微分可能多様体において，外微分の演算 d を用いて定義される de Rham の意味のコホモロジーを問題にする。このコホモロジーを用いて，ベクトル・ポテンシャルの分類をおこなう。

ベクトル・ポテンシャルの３つの成分を使って書いた次の形の式を，１次の微分形式，略して１－form という：

$$A = A_x \mathrm{d}x + A_y \mathrm{d}y + A_z \mathrm{d}z$$

Case A では，すべての closed 1-form は exact である。すなわち，$\mathrm{d}A = 0$ なら，適当な関数 f が存在して，$A = \mathrm{d}f$ と書ける。これは，

$$\mathrm{rot}\,\vec{A} = 0 \quad ならば, \quad \vec{A} = \mathrm{grad}\,f$$

というのと同じである。この事実を，de Rham の意味の（１次の）コホモロジー群は０である，と言いあらわす：

Case A では，　$H^1(M)_{\mathrm{de\ Rham}} = 0$

この場合，関数 f を用いたゲージ変換によって，$\vec{A}$ は０に移せる。量子力学では，$\vec{A}$ を含んだ演算子のハミルトニアンが問題になるが，やはりこの f を使ってユニタリー変換が定義でき，それによって，$\vec{A}$ を含んだハミルトニアンはすべて，$\vec{A} = 0$ としたハミルトニアンに変換できる。ということは，AB 効果はおこらないということである。

AB 効果がおこるのは，それができない場合，つまり，$\mathrm{rot}\,\vec{A} = 0$ のとき $\vec{A}$ がゲージ変換で消せない場合である。実際 Case B はそのような場合で，この場合は，$\mathrm{d}A = 0$ のとき A は一般の次の形になる：

$$A = \lambda A_0 + \mathrm{d}f$$

ここで A_0 は，closed だが exact でない 1-form で具体的には

$$A_0 = \frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2 + y^2}$$

λ は実数で，これを用いて（磁場 $\mathrm{rot}\,\vec{A} = 0$ の）ベクトル・ポテンシャル $\vec{A}$ の分類ができる。 以上のことを，コホモロジーの言葉で，次のように言いあらわす：

Case B では，　$H^1(M)_{\mathrm{de\ Rham}} \cong \boldsymbol{R}$

なお，この λ は（ソレノイドのなかの）磁束に比例しており，このことによってAB効果が説明できる。このように，AB効果の存在と直接関係があるのは，このコホモロジー群である。

4. コホモロジー群とホモトピー群のあいだの一般的関係

Algebraic Topology（代数的位相幾何学）の次の3つの定理を使う：

(i) de Rham の定理[1)]。 これによって，実の微分可能多様性体の上の de Rham cohomology と実係数の singular cohomology（特異コホモロジー）の関係がつけられる。

(ii) 普遍係数定理[1),2)]。 これによって，実数を係数にもつ（co-）homology と整数を係数にもつ(co-) homology の関係がつけられる。

(iii) Hurewiez の定理[2),3)]。 これによって，整係数ホモロジーとホモトピーの関係がつけられる。

まず，(i)によれば，M が paracompact $\boldsymbol{R}$-differentiable manifold の場合，

$$H^1(M)_{\text{de Rham}} \cong H^1(M;\boldsymbol{R})$$

ここで，$\boldsymbol{R}$-係数の特異コホモロジー群 $H^1(M;\boldsymbol{R})$ は実ベクトル空間で，ホモロジー群 $H_1(M;\boldsymbol{R})$（これも実ベクトル空間）の双対空間になっている。ということは，要するに，de Rham のコホモロジーによるベクトル・ポテンシャルの分類と $\boldsymbol{R}$-係数の特異ホモロジーによる閉曲線の分類とは，一対一に対応している，ということである。

ところで，このホモロジーによる閉曲線の分類と，ホモトピーによる閉曲線の分類とは同じでない。一般に，ホモトピーによる分類の方が，より細かい分類になっている。

(ii)によると，G を任意のアーベル群として，次の公式が成立する：

$$H_1(M;G) \cong H_1(M) \otimes G + H_0(M) * G$$

$$H^1(M;G) \cong \mathrm{Hom}(H_1(M), G) + \mathrm{Ext}(H_0(M), G)$$

ここで，

$$H_p(M) \equiv H_p(M;\boldsymbol{Z}) \quad (p=0,1)$$

である。要するに，一般係数の（1次の）ホモロジー群もコホモロジー群も，$\boldsymbol{Z}$-係数のホモロジー群 $H_0(M)$ と $H_1(M)$ で書ける。

$M \neq \phi$ で path connected なら，上の2つの公式の右辺第2項は，いずれも0になることが示せるから，この場合は $H_1(M)$ だけで書ける。

したがって，とくに $G=\boldsymbol{R}$ のとき，公式は次のようになる：

$$H_1(M;\boldsymbol{R}) \cong H_1(M) \otimes \boldsymbol{R}$$

$$H^1(M;\boldsymbol{R}) \cong \mathrm{Hom}(H_1(M), \boldsymbol{R})$$

最後に(iii)によると，M が path connected の場合，すべての $x \in M$ にたいし，

$$H_1(M) \cong \pi_1(M, x) \text{ abelianized}$$

とくに $\pi_1(M, n)$ がアーベル群なら，

$$H_1(M) \cong \pi_1(M, x)$$

5. 具体例への応用

1) Case A：$M = \boldsymbol{R}^3$ は，path connected であり，simply connected である。次の計算：

$$0 = \pi_1(M, x) \cong H_1(M)$$

$$\cong H^1(M;\boldsymbol{R}) \cong H^1(M)_{\text{de Rham}}$$

が示しているように，ホモトピー群が 0 であることから，de Rham のコホモロジー群も 0 であることが導かれる。

したがって，空間が単連結なら，AB 効果はおこらない，ということがいえる。

2) Case B：$M = \boldsymbol{R}^3 - K$（円筒）は path connected であるが，not simply connected である。$\pi_1(M, x) \cong \boldsymbol{Z}$ であり，これはアーベル群だから，(iii)により，$H_1(M) \cong \boldsymbol{Z}$. (ii)の公式を使うと

$$H^1(M;\boldsymbol{R}) \cong \mathrm{Hom}(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{R}) \cong \boldsymbol{R}$$

となるから，(i)によって

$$H^1(M)_{\text{de Rham}} \cong \boldsymbol{R}$$

が導かれる。

したがって，空間が単連結でなくてホモトピー群が $\boldsymbol{Z}$ の場合には，このことから de Rham のコホモロジー群が $\boldsymbol{R}$ であることが導かれ，AB 効果の説明ができる。

3) ところで，空間 M が〝単連結でない〟ということは，たんに，$\pi_1(M, x) \neq 0$ を意味するにすぎない。このホモトピー群が $\boldsymbol{Z}$ でなければ，必ずしも de Rham のコホモロジー群 $\boldsymbol{R}$ が得られるとは限らない。

たとえば，M が回転群 $SO(3)$ のパラメーター空間だったとすると，この M は path connected, not simply connected で，$\pi_1(M, x) \neq 0$ である。しかし，

$$\pi_1(M, x) \cong \boldsymbol{Z}_2 \text{ (abelian)}, \quad H_1(M) \cong \boldsymbol{Z}_2, \quad H^1(M;\boldsymbol{R}) \cong \mathrm{Hom}(\boldsymbol{Z}_2, \boldsymbol{R}) = 0$$

となって，

$$H^1(M)_{\text{de Rham}} = 0$$

である。

ここではたんに，ホモトピー群が0でなくても de Rham のコホモロジー群が 0 であるような数学的な例をあげただけだが，もしこのような空間Mが，何かある力学系の configuration space として意味をもっているとするなら，次のことが結論できるだろう：

空間が単連結でないことは，ＡＢ効果がおこるための十分条件ではない。

4) $M=SO(3)$ を configuration space とするような力学系は，考えられないわけではない。実際，これを球対象なコマの configuration space として扱った Schulman の paper がある[4]。（なお，$SO(2)$ を configuration space にもつ力学系は平面回転子である。）

しかし，ここには，もう一つ別の例をあげておく。d 次元空間に n 個の indistinguishable particles がある場合， configuration space は[5]は，

$$M = (\underbrace{\boldsymbol{R}^d \times \cdots \times \boldsymbol{R}^d}_{n\text{個}} - D)/S_n$$

ここで対角線集合Dを引いたのは，粒子の座標が一致する点を除いたことを意味する。また，対称群S_nでわって商空間をつくったのは，粒子が〝区別できない〃ことを考慮したためである。

$d \geqq 3$ の場合，

$$\pi_1(M, x) \cong S_n.$$

これより，

$$H_1(M) \cong S_n \text{ abelianized } \cong S_n/A_n \cong \boldsymbol{Z}_2$$

となる。そうすると，以下の計算は，$M=SO(3)$ の場合とまったく同じで，

$$H^1(M)_{\text{de Rham}} = 0$$

が導かれる。これは，ＡＢ効果がおこらない場合である。

なお，$d=2$ のときはトポロジーがまったく異なり，

$$\pi_1(M, x) \cong B_n(\boldsymbol{R}^2) \text{ (Braid group)}$$

となる。この場合は，２次元電子系の分数量子ホール効果との関連が，最近問題になっている[6]。

参考文献

1) 河田敬義，位相幾何学，岩波書店（1965）。

2) 笹尾靖也，代数的位相幾何学，森北出版（1975）。

3) C. Kosniowski, *A First Course in Algebraic Topology,* (Cambridge University Press (1980).
コスニオフスキ，トポロジー入門，東京大学出版会（1983）。

4) L. Schulman, Phys. Rev. **176** (1968) 1558.

5) M. G. G. Laidlaw and C. M. Dewitt, Phys. Rev. **D3** (1971) 1375.

6) Yong-Shi Wu, Phys. Rev. Letters **52** (1984) 2103:
D. J. Thouless and Yong-Shi Wu, Phys. Rev. **B31** (1985) 1191;
R. Tao and Yong-Shi Wu, Phys. Rev. **B31** (1985) 6859.