フィボナッチ鎖上のイジングスピン

東大・物工　常次宏一

§1 はじめに

準結晶の一体問題については強結合ハミルトニアンを用いた研究が進みエネルギースペクトルの異常等の興味深い結果が得られている。[1] ここでは相転移のような協同現象において準周期性が相互作用にどう影響するかを考え、準結晶に特徴的な物性を探る。

準結晶の構造はまず並進対称性の欠如によって特徴づけられるが、あくまでも決定論的なもので、アモルファスのような確率論的なものではないため、レプリカのような余分な自由度を持込む必要がない。またアモルファスもアンサンブル平均を取った後は並進対称性を回復する。一方、準結晶のある有限部分に注目すると、まったく同じものがその直径の数倍以内の距離に必ず存在する。このことがアモルファスとの最大の違いである。第1の点は通常の系において自然に定義される空間的に一様なオーダーパラメーターが準結晶においても well defined かどうかという問題と関係する。第2の点より準結晶は短距離秩序では結晶とそう変わらないが長距離秩序が成長してくると結晶との本質的な差が現れると考えられる。また多くの準結晶に存在する格子の自己相似性によって実空間繰込み群が強力な解析手段となることが予想されるが、準結晶がどのようなユニバーサルクラスに属するか、臨界指数が通常の系とどう変るかということも大変重要な問題である。

§2 モデルハミルトニアンと繰込み群

既にいくつかの準結晶のスピン統計の研究が行なわれているが、[2] ここでは最も単純な1次元フィボナッチ鎖上の最近接相互作用をするイジングスピン系を扱うことにする。[3] 2種類のボンドτと1をフィボナッチ列$\{\tau 1 \tau \tau 1 \tau 1 \tau \cdots\}$に並べ各ボンドにイジングスピンの交換エネルギー$J_\tau, J_1$を対応させる。外部磁場がない場合伝送行列は可換なので熱力学量はJ_τ, J_1の一様な系の熱力学量にボンドの比率をかけた加重平均になる。今の場合は

$$O_{FIBONACCI} = (O_1 + \tau O_\tau)/(1+\tau) = (O_1 + \tau O_\tau)/\tau^2 \qquad (1)$$

となる。系の準周期性を取り込むには外部磁場hをかけるか、磁場に対する応答である磁化m、帯磁率χを考える必要があるが、1次元系では有限温度で相転移は起こらないので自発磁化は零である。図1(a)のように、両側のボンドに応じてスピンサイトに1τ, $\tau\tau$, $\tau 1$と名前をつける。ハミルトニアンを

$$-\beta\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{\infty} K_i S_i S_{i+1} + \sum_{i=1}^{\infty} H_i S_i, \qquad S_i = \pm 1 \qquad (2)$$

$$\beta = 1/T, \quad K_i = \beta J_1 \text{ or } \beta J_\tau, \quad H_i = \beta h_{1\tau} \text{ or } \beta h_{\tau\tau} \text{ or } \beta h_{\tau 1}$$

とする。最初一様な外部磁場から出発しても繰込みの途中でサイトの種類によって磁場の大きさが変るので最初から3種類用意しておく。一方、交換エネルギーは等しく磁場がフィボナッチ列になっているような系もこのハミルトニアンで良い。

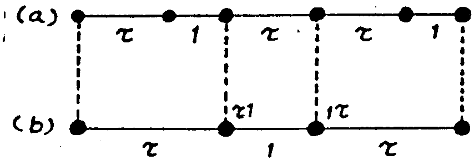

図 1

いまフィボナッチ鎖を1回縮小する。すなわち $\tau 1$ サイトのスピンをすべてdecimateして ボンドの名前を $\tau 1 \to \tau$、$\tau\tau 1 \to 1\tau$ とつけ直す。(図1(b)) decimationによって結合定数が変化しまた定数の自由エネルギー項 f_0 が現れるが、格子の1次元性と自己相似性によって結合定数は K_i, H_i の5ヶ以上には増えない。以上の繰込み操作を具体的に書くと次式のようになる。[3]

$$y_1^{(n+1)} = y_\tau^{(n)}, \qquad y_\tau^{(n+1)} = \sqrt{\frac{(y_1^{(n)}y_\tau^{(n)}w_3^{(n)}+1)(y_1^{(n)}y_\tau^{(n)}+w_3^{(n)})}{(y_1^{(n)}w_1^{(n)}+y_\tau^{(n)})(y_\tau^{(n)}w_3^{(n)}+y_1^{(n)})}},$$

$$w_1^{(n+1)} = w_2^{(n)}\sqrt{\frac{(y_1^{(n)}y_\tau^{(n)}w_3^{(n)}+1)(y_\tau^{(n)}w_3^{(n)}+y_1^{(n)})}{(y_1^{(n)}y_\tau^{(n)}+w_3^{(n)})(y_1^{(n)}w_3^{(n)}+y_\tau^{(n)})}}, \qquad w_2^{(n+1)} = w_1^{(n)}\frac{y_1^{(n)}y_\tau^{(n)}w_3^{(n)}+1}{y_1^{(n)}y_\tau^{(n)}+w_3^{(n)}},$$

$$w_3^{(n+1)} = w_1^{(n)}\sqrt{\frac{(y_1^{(n)}y_\tau^{(n)}w_3^{(n)}+1)(y_1^{(n)}w_3^{(n)}+y_\tau^{(n)})}{(y_1^{(n)}y_\tau^{(n)}+w_3^{(n)})(y_\tau^{(n)}w_3^{(n)}+y_1^{(n)})}}, \tag{3}$$

$$-\beta f_0^{(n+1)} = -\beta f_0^{(n)} + \frac{1}{2\tau^{n+1}}\log\left(\frac{\sqrt{(y_1^{(n)}y_\tau^{(n)}w_3^{(n)}+1)(y_1^{(n)}y_\tau^{(n)}+w_3^{(n)})(y_1^{(n)}w_3^{(n)}+y_\tau^{(n)})(y_\tau^{(n)}w_3^{(n)}+y_1^{(n)})}}{y_1^{(n)}y_\tau^{(n)}w_3^{(n)}}\right),$$

ただし、

$$y_1^{(n)} = \exp(2K_1^{(n)}),\quad y_\tau^{(n)} = \exp(2K_\tau^{(n)}),\quad w_1^{(n)} = \exp(2H_{1\tau}^{(n)}),\quad w_2^{(n)} = \exp(2H_{\tau\tau}^{(n)}),\quad w_3^{(n)} = \exp(2H_{\tau 1}^{(n)}). \tag{4}$$

この繰込み群方程式には次のような固定点が存在する。[3]

$$\text{(i)}\ K_1^* = K_\tau^* = \infty,\ H_{1\tau}^* = H_{\tau\tau}^* = H_{\tau 1}^* = 0 \qquad \text{"ferromagnetic"} \tag{5a}$$

$$\text{(ii)}\ K_1^* = K_\tau^* = \infty,\ H_{1\tau}^* = H_{\tau\tau}^* = H_{\tau 1}^* = \infty \qquad \text{"frozen"} \tag{5b}$$

$$\text{(iii)}\ K_1^* = K_\tau^* = 0,\ H_{1\tau}^* = H_{\tau\tau}^* = H_{\tau 1}^* = g^* \qquad \text{"paramagnetic"} \tag{5c}$$

これらは $J_1 = J_\tau > 0$ の通常のイジング鎖の固定点であるが[4]、この他に周期2のリミットサイクル

$$\text{(iv)}\ K_1^* = K_\tau^* = 0,$$
$$H_{1\tau}^{(2n)*} = H_{\tau\tau}^{(2n+1)*} = H_{\tau 1}^{(2n+1)*} = g_1^*,\quad H_{1\tau}^{(2n+1)*} = H_{\tau\tau}^{(2n)*} = H_{\tau 1}^{(2n)*} = g_2^*. \tag{6}$$

が存在して、これが磁場下のフィボナッチ鎖上のイジングスピンの常磁性状態に対応する。g_1^*, g_2^* は拡張された意味で"fixed plane"を成しているが、その中に(iii)の通常の常磁性 fixed line を含む。リミットサイクル(iv)の存在は準結晶の特徴である。つまり通常の格子では臨界点において特徴的長さが無いが、パラメーター空間におけるこの振動は正に特徴的長さの存在を意味していて、準結晶上のスピン状態の内部構造を反映している。

§3 熱力学

具体的に、有限磁場 h 下での1スピン当りの磁化 m, 線型帯磁率 χ, 比熱 C を計算する。これらの物理量は1スピン当りの自由エネルギー f_0 の微分

$$m = \frac{\partial}{\partial H}(-\beta f_0), \qquad \chi = \beta\frac{\partial^2}{\partial H^2}(-\beta f_0), \qquad C = \beta^2\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}(-\beta f_0) \tag{7}$$

によって与えられるが、(3)式よりこれらの微分に対する recursion方程式を導き、それを用いて数値計算を行なった。パラメーターとしては ferroとantiferroのボンド $J_\tau = -J_1 = J > 0$, 一様な外部磁場 h を選んだ。図2に m, χ, C を h の関数として図示した。外部磁場を強くするにしたがって階段状に磁化がおこるのが特徴的である。$T \to 0$ と共にこのステップは急になり χ はδ関数となる。また χ のピークのところで C には dip を生じる。図3には一定の外部磁場下で温度の関数として図示した。χ, C が温度とともに振動することがわかる。これらの特徴的なふるまいは、磁場が無い時の基底状態のスピン構造(図4)によって理解することができる。

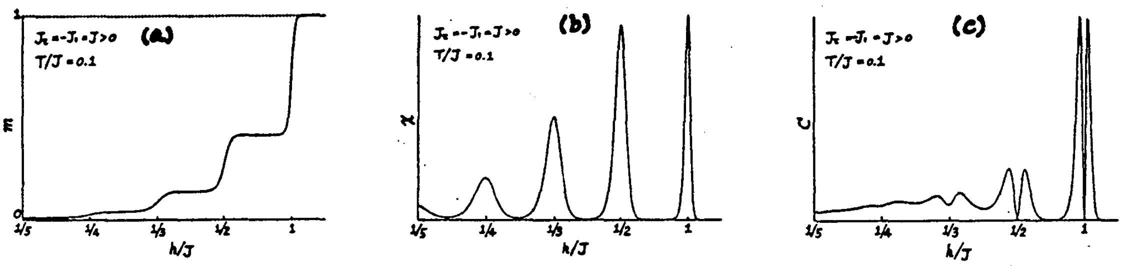

図2

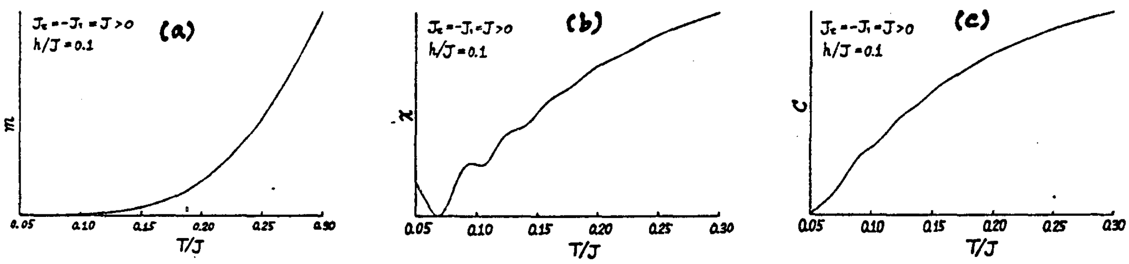

図3

磁場が無い時は全体のスピン反転に対してエネルギーは変わらない。これをよく見ると任意の大きさの磁化をもつクラスターが存在して入れ子構造になっていることが判る。(図5) 磁化 $-2n$ $(n=1,2,\cdots)$ のクラスターの逐次的な反転が $h=J/n$ における m の階段状の変化をもたらし、またクラスターの基底状態が $h=J/n$ で完全に2重縮退することが、C の dip をつくる。一方温度に対するふるまいは磁化 $-2n$ $(n<J/h)$ のクラスターが大きい方から順に常磁性化していくことで説明できる。各クラスターの常磁性化に対して χ, C のピーク1ヶが対応している。

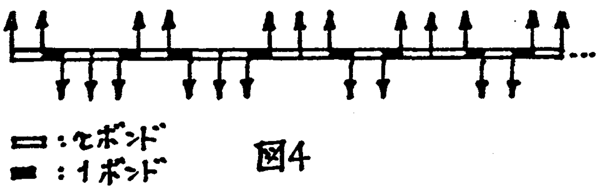

図4

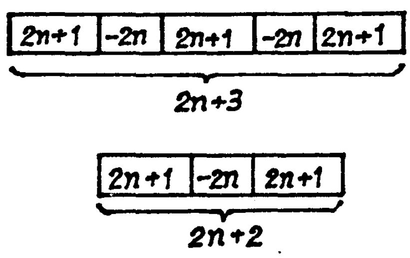

図5

参考文献

1) 代表的なものとして 1次元については M.Kohmoto et.al : Phys. Rev. Lett. 50 (1983) 1870 ; S.Ostlund et. al. : ibid 1873 2次元については H.Tsunetsugu et. al. : J. Phys. Soc. Jpn. 55 (1986) 1420

2) 1次元フィボナッチ鎖上のXYスピン系については TH. M. Nieuwenhuizen : J. de Physique C3 (1986) 211 ; 2次元ペンローズ格子上のイジングスピン系については C.Godreche et. al. ; ibid 197

3) Y. Achiam et. al. : Phys. Rev. B33 (1986) 6460

4) D. R. Nelson et. al. : Ann. of Phys. (N.Y.) 91 (1975) 226