ラセン的自己相似性を持った２次元準結晶のひとつのクラスの構成法

東北大・理　新関駒二郎　三谷　尚

複素２次体の整数論の助けを借りる事により、一群の２次元準格子（準結晶）を構成することができる。これらの準結晶は自己相似性を持っているが、その相似変換は一般に improper な変換となる。すなわち縮尺の変更と回転の組み合わせである。従って、実格子、及び回折パターンは共にラセン型の構造を持つ。このような２次元準格子の特別な場合として、12回対称性を持った２次元準格子がある。以下、この準格子の構成法と、その性質について簡単に説明する。

構成法としては、高次元空間からの射影法を用いる。基礎となる格子は２つの平面３角格子 L_T の直積、$L_T \times L_T$ によって与えられる４次元超六方格子である。L_T は次のように、複素数を用いて表わすのが便利である。

$$L_T = \{ n_1 + n_2 \omega \mid n_1 、n_2 \in \mathbb{Z} \} 、$$

但し、$\omega = e^{2\pi i/3}$ $(=(-1+\sqrt{3}i)/2)$。　４次元超六方格子を不変にする線形変換の中で、次の unimodular 行列を考える。

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1+\omega \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

この行列の２つの固有値は、$\tau_{\pm} = 1 \pm \zeta$ によって与えられる。但し、$\zeta = e^{\pi i/6}$ $(= (\sqrt{3}+i)/2)$、$\zeta^{12} = 1$。対応する左固有ベクトル（固有行ベクトル）は、$(1, \pm\zeta)$ である。ここで、$|\tau_+| = \tau_p = 2\cos(\pi/12)$ $(= (\sqrt{3}+1)/\sqrt{2} \fallingdotseq 1.93185)$, $\mathrm{Arg}(\tau_+) = \pi/12$ $(=15^\circ)$, $|\tau_-| = 1/|\tau_+| = (\sqrt{3}-1)/\sqrt{2}$、等の関係に注意しておく。

上の結果を用いると、次式で定義される複素平面上の点集合は拡大率が $|\tau_+|$ $(=\tau_p)$、回転角が $\mathrm{Arg}\,\tau_+$ で与えられる自己相似性を持った準格子である事をしめし得る。

$$L_{DQ} = \{ \nu_1 + \nu_2 \zeta \mid \nu_1 、\nu_2 \in L_T 、\nu_1 - \nu_2\zeta \in \phi + W \} 、$$

ここで、ϕ は位相ベクトルを表わす複素数、Wは「窓」を表わす有界複素領域である。Wとして、原点を中心として12回対称性を持った領域をとる場合には，L_{DQ} は12回対称性を持つ。

Hを $\{\rho 、\rho\zeta^2 、\rho\zeta^4 、\cdots \rho\zeta^{10}\}$ $(\rho = \tau_+/\sqrt{3})$ を頂点とする正６角系領域とし、$W = H \cup \zeta H$ で定義される星型正12角形の窓にとった場合の準格子が特に美しい。代数的最近接対[1]の間にボンドを書き入れる事によって作られる平面タイル張りを図１に示す。また、この

準格子の回折パターンを図２に示す。図１、２共に、12回対称性、およびτ_+ によって特徴ずけられる自己相似性が見られる。これらの図は、12回対称性を持った Ni-Cr 合金準結晶の電顕像、および回折像[2)]を良く再現する。

なお、われわれとは独立に、蜂の巣格子型のグリッドを用いる事により、12回対称性を持った準格子が構成された。[3)] この準格子は我々の方法では、星型 12角形の外接正12角形を窓とする事によって得られる。

参考文献

1) A.Katz and M.Duneau J.Physique 47(1986)181

2) T.Ishimasa, H.U.Nissen and Y. Fukano Phys.Rev.Lett.55(1985)511

3) P.Stampfli Helv.Phys.Acta(1986)1260

図１　星型正12角形の窓を用いた正12回対称性準格子。太線はインフレーションされた格子。

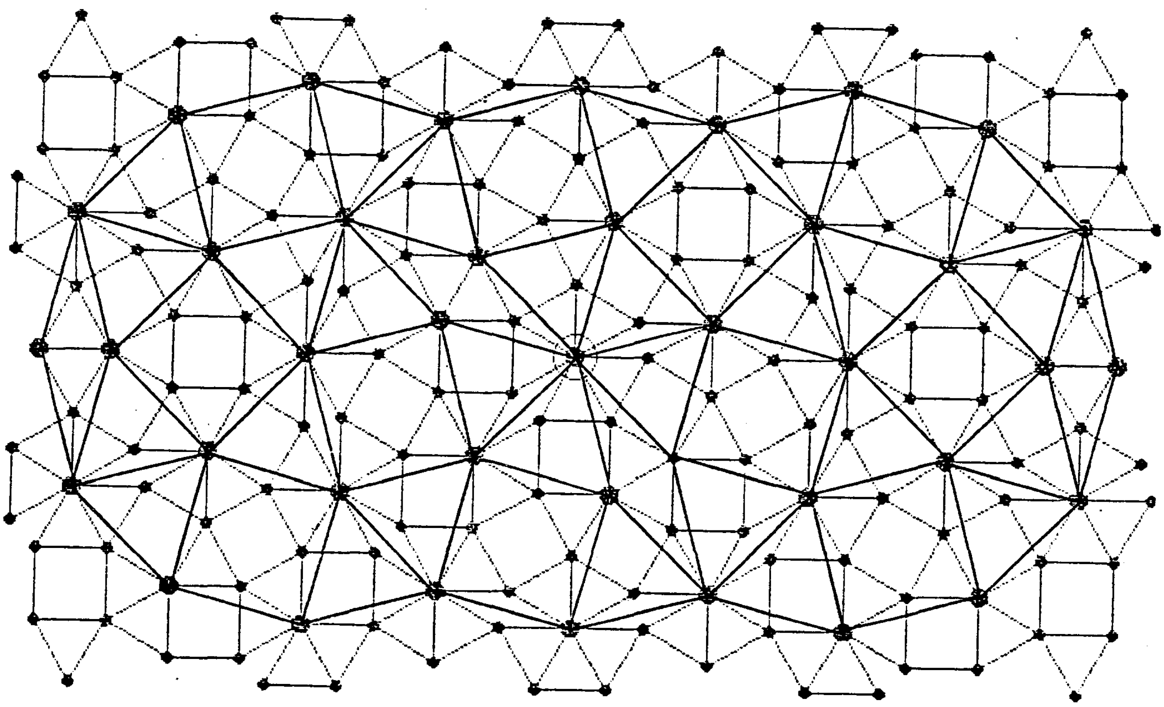

図２　図１のフーリエ像。強度に応じて、半径は大きくなる。