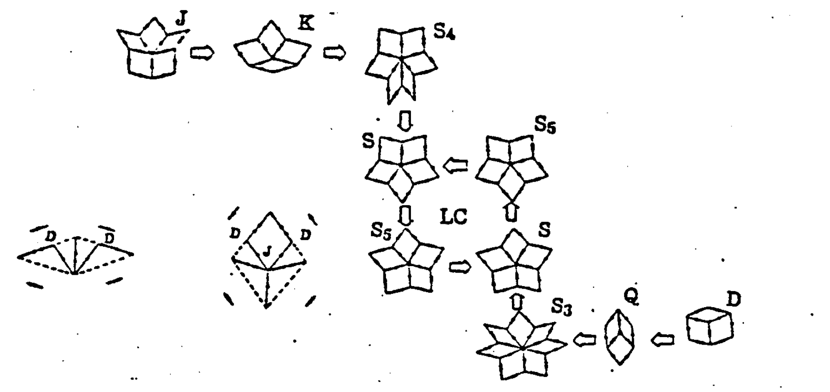
ペンローズ紋様の性質と準結晶構造

小川 泰、Robert Collins、宮内 一、酒井恭子
(筑波大学物理工学系)

ペンローズ紋様における5回対称性

菱形版のペンローズ紋様にいわゆるdefrationを施すと、各菱形Aの内部に一点と、各単矢の辺上に一点が生じる。新しい点の環境は、それぞれJとDであり、defrationの度にJ→K→S_4→LC, D→Q→S_3→LCのように「進化」する。ただし、LCは、一点の環境のみに着目



するならば一種のlimit cycleで、形としてはS↔S_5の二拍子、S→S_5の過程で36°回転するので、向きも考慮すれば四拍子のcycleである。5回対称性をもつのは、LCの過程に入ってからである。一点のすぐ周りの環境のみに着目するならば、このような単純なlimit cycleであるが、5回対称性の支配域は、面積にしてほぼτ^2倍という具合に、どんどん広がっていき、上限なしに増大する。これは、菱形の一辺を常に1に保つ見方に基いているが、初め一つの菱形Aの内部に生じたJが進化して生じた5回対称域は、相対的には、決して初めの菱形Aの外部に及ぶことはない。

新旧の点に対応して、さまざまな広さの5回対称域が互いに重なり合いながら共存している。周期性と5回対称性の矛盾として理解されていることの内容をもう一度検討してみると、「平面図形全体に対する回転対称中心は、1-,2-,3-,4-,6-回対称を除いては、複数の対称中心が有限密度では存在しえない。」ということである。もしあるとしても、1個か、または密度無限大になってしまう。結晶のもちうる回転対称性は、話を周期性から始めなくとも、以上のことが結論される。つまり結晶は、本来離散的で、最小距離を有するので、5回対称性などが禁止されるのである。

二次元ペンローズ紋様における5回対称性は、以上に述べたようなさまざまな5回対称性支配域の共存という、階層的･自己相似的構造をもっている。三次元ペンローズ紋様でも同様に、新旧さまざまな正12面体的な対称点が共存していると見ることができるが、次元による大きな相違は次の点にある。三次元の場合、対称性の高い凸多面体F_{20}とK_{30}は、対称性が

高いのは外観だけで、実は、内部構造は対称性が低い。外観、内部構造とも対称性が高いのは、花形12面体だけである。菱面体A_6とO_6を構成要素とするとき、花形12面体は、確かに正12面体的な対称性をもつ最小域であるが、例えばその花形面の全てにF_{20}を貼り付けたものは、もはや厳密には5回対称ではありえない。F_{20}などの内部構造は無視した範囲での対称性だけを問題にするか、同じことだが、構成要素を菱面体A_6とO_6と見ることへのこだわりを捨てなければ、正12面体的な対称性の支配域は、決して拡大しない。しかし、少なくともF_{20}をも構成要素と見たときには、正12面体的な対称性の支配域が、二次元の場合の5回対称性と同様の階層的、自己相似的構造をもって共存していることが重要である。

準結晶の秩序度

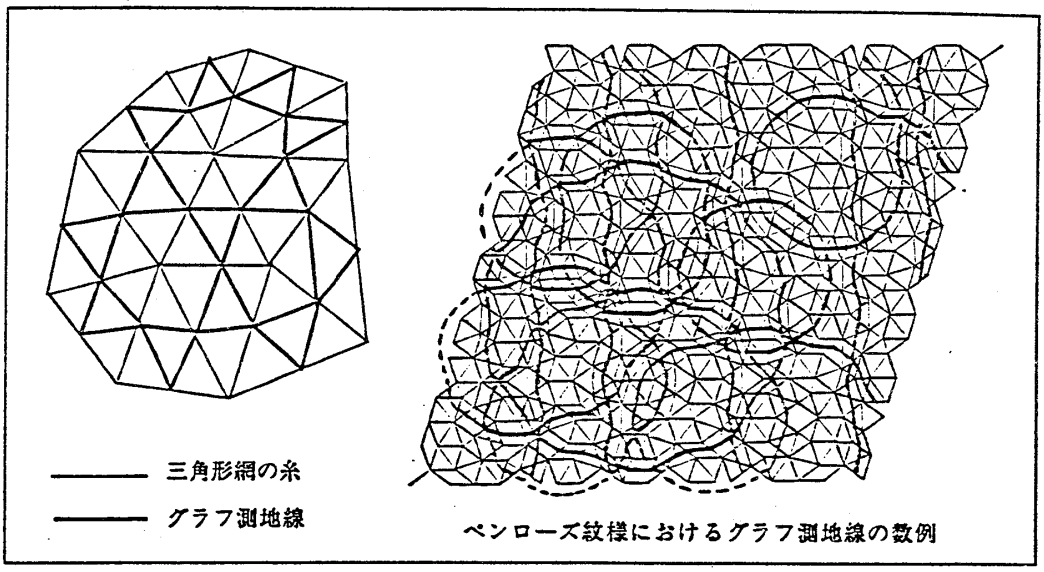
ペンローズ紋様を描いてみると非常に間違いやすい。家元のペンローズ自身が論文に掲げているものさえ、周辺部分に誤りがある。準結晶が成長する過程でも、物質が間違わないとしたら不思議である。

さて、ペンローズ紋様を理想的な準結晶構造としたとき、間違い方の度合というものが考えられよう。例えば、ペンローズ紋様には現れない部分配列を含むか? (つまりdefrationが可能か?)、含まないならば何回infrationを行えるか? (いわば自己相似度)、ペンローズ紋様には現れない局所的な周期配置はどのくらい持続し、また、どのくらい含まれるか? 等々。いわば、可能性としての準結晶的秩序度のスペクトルはほぼ連続的であろう。この準結晶的秩序度と物性の関係など、いずれ研究してゆく必要がある。その前に、ペンローズ紋様のもつ諸性質をいろいろな視点から調べておく必要があろう。

数学の民話にも喩えられるFibonacci数列の世界同様、ペンローズ紋様のもつ美しい性質も尽くし難いほど沢山ある。Penroseの最初の動機は、5回対称性や、自己相似性自体よりも、むしろ、非周期性を強制するタイルの種類をどこまで減らせるか? ということであったという。その基本法則として、自己相似という大域的なもののみではなく、いわゆるmatching ruleという局所的なものをかなり重要と考えている。自己相似性とは奇妙なもので、いうなれば、原子が自分の落ち着き場所を見付けるのに「星占い」で判断するようなものである。原子は自分のごく近くだけを見て判断していると考えるほうが自然であろう。自己相似性は出発点ではなく、局所則の結果として必然的に起こる結果だという考え方である。少なくとも、現在の科学の常識的な立場は、そうである。三次元ペンローズ構造についても、defrationとか、高次元結晶格子の射影といった大域的な観点からの構築則だけでなく、局所的な構築則が必要である。その探究がわれわれのグループの役割の一つであると考えて局所則の発見を試みてはいるが、まだ、報告する段階ではない。

グラフ的測地線

ここで述べるグラフ的測地線は、ペンローズ紋様のみを対象としたものではなく、任意の二次元三角形網の特徴を見る一つの方法である。



網目が三角形の任意の二次元的な網が与えられたとしよう(あるいは平面の三角形分割といってもよい)。k本の糸が集まる結び目を、k価の点と呼ぶことにする。各網目三角形の三辺の中点を互いに結んで、それぞれに合同な三角形を内接させる。辺を共有する隣の網目三角形とは、共通辺上で内接三角形の頂点どうしが相接し、そこでは、二本の道筋が交差しているように見える。このような道の作る道路網は、元の網が与えられれば、一義的に決定され、後に述べるような理由から、グラフ測地線と呼ぶ。

次に、このように定義したグラフ測地線、一本一本の姿形を問題にする。先ず、トポロジカルに周期的な「結晶的な」三角形網ではどの結び目も6価の点であり、どのグラフ測地線も直線的、かつ、全道路網は三組の「グラフ的平行線群」からなる。$3 \leqq k < 6$の点は、その点を挟んで並んで走ろうとする道を互いに接近させようとする「収束性」をもっている。また、$k > 6$の点は逆に、その点を挟んで並んで走ろうとする道を互いに遠ざける「発散性」をもっている。その結果、一本の道が自分自身と交差したり、閉じた環状路を形成したりすることが起こる。局所的には直進している道が、空間に「グラフ的な局所曲率」があるために曲げられていると解釈できる。これが、グラフ的測地線とよぶ所以である。

k価の点である結び目Nに対して$\Delta_N = k-6$とおくと、環状路内の点についてのΔ_Nの総和は-6である。充分に説明するゆとりがないが、この値は、単連結な多面体表面として閉じた三角形網が$\Sigma\Delta_N = -12$に対応することを考えると、いわば環状路は「大円」に相当する。

菱形版ペンローズ紋様の場合、各菱形とも短い対角線を結んで作った三角形網は、各準格子点に粒子をおいてのDelaunay網に相当する。この三角形網では、数種の環状路、直進道、何度も自身と交差する閉路などあり、このような閉路は、無限大のものまで階層構造をなしている。正曲率域の一つのまとまった区切りである環状路の多さは、他方、それに見合う負曲率域の存在を意味し、ペンローズ紋様では、これらの二域が局所中和せず、曲率のゆらぎがかなり大きいことを意味している。なお、直進路はAmman格子状になっている。