2)　T. C. Halsey et al., Phys. Rev. A**33** (1986) 1141.
3)　N. G. Makorov, Proc. London Math. Soc. **51** (1985) 369.
4)　P. Grassberger (unpublished).
5)　K. Honda et al. (to be published).
6)　T. C. Halsey et al., Phys. Rev. Lett. **56** (1986) 854.
7)　P. Meakin et al., Phys. Rev. A**34** (1986) 3325.

ランダム媒質中におけるクラックの成長モデルとサイズ分布

東北大・工　原　啓明
一橋大・経　岡山誠司

図形に見られる自己相似性は直接パターンとして観察される。しかし地殻の亀裂，材質（金属，コンクリート等）に発生したクラックは，そのパターンを直接見ることは出来ず，非破壊検査によって各要素（亀裂，クラック）のサイズ分布を知るだけである。

実験によれば，サイズ分布は，状況（環境）によって，フラクタル次元に相当するlog-logプロットの直線上（べき分布）には乗らない[1),2)]。同様な事実はランダムカッティングのサイズ分布[3)]や，情報科学[4)]における（相対）度数－順位を表わすいろいろのグラにも見られる。

これはある意味では，フラクタルの概念を拡張する必要性があることを示唆している。

ここではlog-log プロットの直線からのずれを示す，ランダム媒質中におけるクラックのサイズ分布を，1つのモデルプロセスによって論じる。

ランダム媒質の構成要素として，大きさや応力（σ）に対する応答の仕方で類別されたセグメント(Seg.)を考える。Seg.の種類をE（$=A, B, \cdots$）で表わす。各Seg. は，t（時間）－依存性のある特性長$L(E, t)$によって$G(L(E, t))$個の等質なサブセグメント(S. Seg)に分割されるものとする。ただし，$t<0$では各Seg.の個数は，共通にG_0個とする（図1）。$L(E, t)$のt－依存性を求めるため，σのもとでS. Seg. に検出不可能な，微小なマイクロクラック(m. c.)の成長する

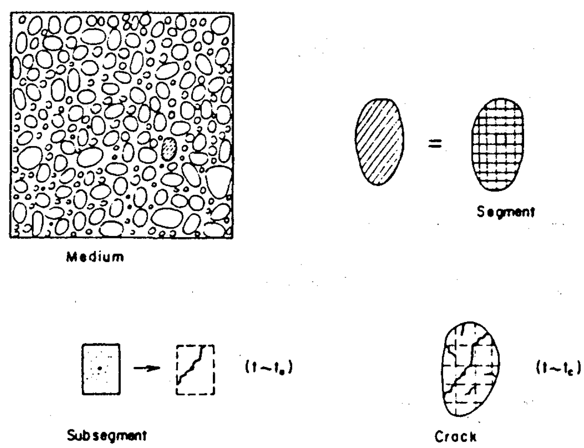

図　1

経路の場合の数 $N_{\mathrm{path}}(E, t)$ を評価する。このため S. Seg. を，長さ極微小な l_μ ($\ll L(E,t)$) の基本要素 E_μ ($\mu=1, 2\cdots, \nu$) の組（μ は方向を表わす）：

$$\begin{pmatrix} E_1, & E_2, & \cdots\cdots E_\nu \\ l_1, & l_2, & \cdots\cdots l_\nu \end{pmatrix} \tag{1}$$

で構成された〝物質空間〟と考えよう。σ の作用で $\{E_\mu\}$ の1要素はm. c. の芽となり，発展のプロセスは，$\{E_\mu\}$ で〝組み立られた〟 N_{path} 個の1つの経路に沿って，他の基本要素をm. c. に変えながら成長するものとする。

場合の数 $N_{\mathrm{path}}(E, t)$ は，(1)を使って漸化式で表現出来る。この式を解くと $N_{\mathrm{path}}(E,t) \sim R_E{}^t$ となる。ただし R_E は，E をパラメーターとする定数で，$1 = R_E{}^{-l_1\tau_0} + R_E{}^{-l_2\tau_0} + \cdots + R_E{}^{-l_\nu\tau_0}$（$\tau_0$：単位長さ当りの時間）を満す。(1)の物質空間で成長する経路の方向（1，2，… ν）で張られる空間を，1辺の長さ $L_{\mathrm{path}}(E, t)$ で表わすと

$$N_{\mathrm{path}}(E, t) \propto [L_{\mathrm{path}}(E, t)]^\nu, \tag{2}$$

$$L_{\mathrm{path}}(E, t) \propto R_E{}^{\frac{t}{\nu}} \ (\because N_{\mathrm{path}}(E, t) \sim R_E{}^t), \tag{3}$$

実際発生するm. c. の長さ $L_{\mathrm{mc}}(E, t)$ は，$L_{\mathrm{path}}(E, t)$ に比例すると考えられるから，

$$L_{\mathrm{mc}}(E, t) (\propto L_{\mathrm{path}}(E, t) = AR_E{}^{\frac{t}{\nu}} \tag{4}$$

m. c. は，図1で示す様に，予定られた経路の1つに沿って他の基本要素をm. c. に変え，〝連結した〟m. c. (con. m. c.)を作る。やがて con. m. c. は，$t \sim t_0$ でS. Seg. の境界に到達しS. Seg. を消滅させる。この時のcon. m. c. の長さを方向 i を考えて，$L_i(E, t)$ と表わす。初めにSeg. をS. Seg. に分割した特性長は $L_i(E, t)$ を i について平均したものである。

S. Seg. に関する方向性のあるcon. m. c. の長さを，(4)との類推から，

$$L_i(E, t) = C_i R_E{}^{\frac{t}{\nu}} \quad (C_i：\text{定数}) \tag{5}$$

とおく。$L_i(E, t_0)$ で特徴づけられた個数 $G(L_i(E, t_0))$ は $t < t_0$ における個数より少なくとも1個だけ少なくなっている。即ち，$L_i(E, t) \nearrow \Rightarrow G(L_i(E, t)) \searrow$ である。

m. c. 成長のシナリオは図2で示す。m. c. は成長段階によってⅠ.初期過程（$\tau_0 < t \sim t_0$），Ⅱ.中間過程（$t_0 < t \sim t_c$），Ⅲ.後期過程（$t_c < t \sim t_{\mathrm{con}}$）に分ける。

Ⅰ.（$\tau_0 < t \sim t_0$）：con. m. c. の成長は，個数 $G(L_i(E, t))$ の減少率と con. m. c. の発生確率 $m_{\mathrm{con.m.c.}}(\sigma, L_i(E, t))$ によって

$$-\frac{1}{G}\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}=m_{\mathrm{con.m.c.}}(\sigma,\ L_i(E,t)) \tag{6}$$

と表わされ，$m_{\mathrm{con.\,m.\,c.}}$ は i 方向のm. c. の発生率 $m_i(\sigma)$ と(5)の成長率に比例するものとする：

$$m_{\mathrm{con.\,m.\,c}}(\sigma,\ L_i(E,t))=\eta\, m_i(\sigma)\frac{1}{L_i}\frac{\mathrm{d}L_i}{\mathrm{d}t} \tag{7}$$

Ⅱ.($t_0<t\sim t_c$)：いくつかのS. Seg. にわたるcon. m.c. は合体してchainを作るため，$L_i(E,t)$ は急に大きくなる：

$$\lambda_i L_i(E,\ t-t_0)\equiv \widetilde{L_i}(E,t),\quad (t>t_0),\quad (\lambda_i\gg 1) \tag{8}$$

合体したcon. m. c. をch. con. m. c. と略記する。ch. con. m. c. は更に合体しながら成長し，その両端がSeg. の境界に伸びると（$\sim t_c$），Seg. 程度のサイズのクラックとして，初めて観測される。

Seg. E におけるch. con. m. c. の密度を $\rho(\widetilde{L_i}(E,t))$ と表わす。ch. com. m. c. の成長は ρ の時間変化によって，

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=m^{(\mathrm{ch})}(\sigma,\ \widetilde{L_i}(E,\ t)) \tag{9}$$

と表わされ，$m^{(\mathrm{ch})}(\sigma,\widetilde{L_i}(E,t))$ (ch. con. m. c. の発生確率）および，$t_0\sim t_c$ の平均の発生率$<m^{(\mathrm{ch})}>$ は，$G(\widetilde{L_i}(E,t))$ と

$$\frac{1}{\varDelta t_{0c}}\int_{t_0}^{t_c} m^{(\mathrm{ch})}(\sigma,\ \widetilde{L_i}(E,t'))\,\mathrm{d}t'=<m^{(\mathrm{ch})}>=-k_E\,G(\widetilde{L_i}(E,t)) \tag{10}$$

$$(\varDelta t_{0c}=t_c-t_0,\quad k>0)$$

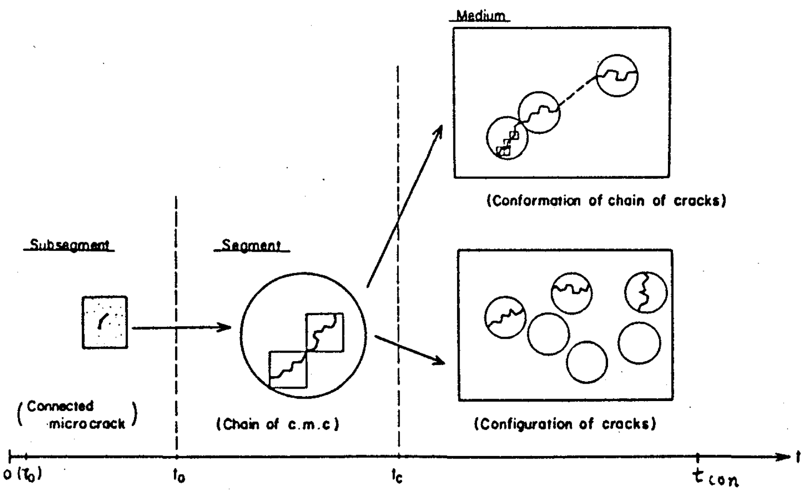

図 2

で結ばれているものとする。即ち$G\searrow\Rightarrow<m^{(ch)}>\nearrow$。(9), (10) で求めた$\Delta\rho(\widetilde{L}_i(E,t))(=\rho(\widetilde{L}_i(E,t))-\rho(\widetilde{L}_i(E,t_0)))$を使って媒質中のクラックの総数$Q(t)$を評価すると

$$Q(t)=-\sum_i\sum_E k_E N_E G(\widetilde{L}_i(E,t)\equiv\sum_i Q_i(t). \tag{11}$$

（N_E ：E種のSeg. の個数）

観測可能なi方向のクラックが発生する確率$Q_i(t)/\sum_i Q_i(t)$は$m(\sigma)$として，(6), (7)から$G(L_i(E,t))$を求め，(8)でスケーリングを行うと

$$\frac{Q_i(t)}{Q(t)}=\frac{\lambda_i^{-D}}{\sum_i \lambda_i^{-D}},\quad (D=\eta\, m(\sigma)) \tag{12}$$

σをかけた時のλ_iのi依存性を，具体的に$B_0(\sigma)i$（$B_0(\sigma)$：定数）とし，σの容易軸に近い方向軸から番号をつける。長さ$\widetilde{L}_i(\sigma)$を

$$\widetilde{L}_i(\sigma)=\lambda_i A_0(\sigma)R_0(\sigma)^{\frac{t}{\nu}}\qquad(\lambda_i=B_0(\sigma)i) \tag{13}$$

で定義すると，$\widetilde{L}_i(\sigma)$ の大小は，σの容易軸に近い方向軸の順に

$$\widetilde{L}_i(\sigma)<\widetilde{L}_2(\sigma)<\cdots\cdots \tag{14}$$

となる。

式(12)の分母子に$A_0(\sigma)R_0(\sigma)^{\frac{t}{\nu}}$をかけると，

$$\frac{Q_i(t)}{Q(t)}=\frac{\widetilde{L}_i(\sigma)^{-D}}{\sum_i \widetilde{L}_i(\sigma)^{-D}}\equiv m^{(cr)}(\widetilde{L}_i(\sigma)) \tag{15}$$

$m^{(cr)}(\widetilde{L}_i(\sigma))$は，長さ(13)（Seg. には関係しない）のクラックの発生確率を表わす。

Ⅲ.（$t_c<t\sim t_{con}$）：媒質の状態は長さ$\widetilde{L}_i(\sigma_1)$ のクラックの発生のパターンによって，(1°) 鎖状型，(2°)分散型に分ける。いづれの場合も，方向iで長さ$\widetilde{L}_i(\sigma)$のクラック 数の組$(n_1, n_2, \cdots n_K)$によって，規定される状態$W^{(S)}(n_1, n_2, \cdots, n_K : N)$，($S=1°, 2°$) は，次の一般化されたランダム・クォークの漸化式で表わされる。

$$\begin{aligned}W^{(S)}(n_1,n_2,\cdots n_K;N)=&\sum_{i=1}^{K}\sum_{\alpha=\pm}\widetilde{P}_{N-1}{}^{\alpha}(n_i,\{n_j\}\mid n_i-\alpha\cdot 1,\{n_j\})\\ &\times W^{(S)}(n_1,n_2,\cdots n_i-\alpha\cdot 1,\cdots, n_K:N-1)\end{aligned} \tag{16}$$

$$W^{(S)}(0,0,\cdots\cdots,0;0)=1, \tag{17}$$

$\widetilde{P}^{\alpha}_{N-1}(n_i,\{n_j\} \mid n_i-\alpha\cdot 1,\{n_j\})=m^{(cr)}(\widetilde{L}_i(\sigma_1))$，$(\alpha=+)$，$0\ (\alpha=-)$ である。初期条件(17)と，(15)式を代入した $\widetilde{P}_{N-1}{}^{\alpha}$ を，(16)に逐次代入して行くと

$$W^{(S)}(n_1, n_2, \cdots, n_K : N)=\frac{N!}{\prod_i n_i!}\prod_i\left(\frac{\widetilde{L}_i^{-D}(\sigma)}{\widetilde{L}(D)}\right)^{n_i} \tag{18}$$

$$(\ \widetilde{L}(D)\equiv\sum_i \widetilde{L}_i^{-D}\ )$$

となる。$\sum n_i=N$，$\sum n_i \widetilde{L}_i(\sigma)=L_c$（1°では L_c はクラックの鎖の長さ，2°では分布したクラックの総和の長さ）一定のもとで，(18)で定義したエントロピーを最大にする n_i は

$$n_i=\frac{\widetilde{L}_i(\sigma)^{-D}}{\widetilde{L}(D)}e^{r}e^{-\beta\widetilde{L}_i(\sigma)}$$

$$(\ e^{r}=N/\sum_i(\widetilde{L}_i(\sigma)^{-D}e^{-\beta\widetilde{L}_i(\sigma)}/\widetilde{L}(D))\ ) \tag{19}$$

図3は $\log n_i=Y$，$\log\widetilde{L}_i(\sigma)=X$ として，(19)をプロットしたものである。(16)式は連続体近似によって，K 次元の Fokker-Planck（FP）方程式になる。この解を経路積分で表わすと，m. c. の成長段階（Ⅰ→Ⅱ）を経過した後のⅢ（1°）の軌跡は，もっと詳細に調べることが出来る。

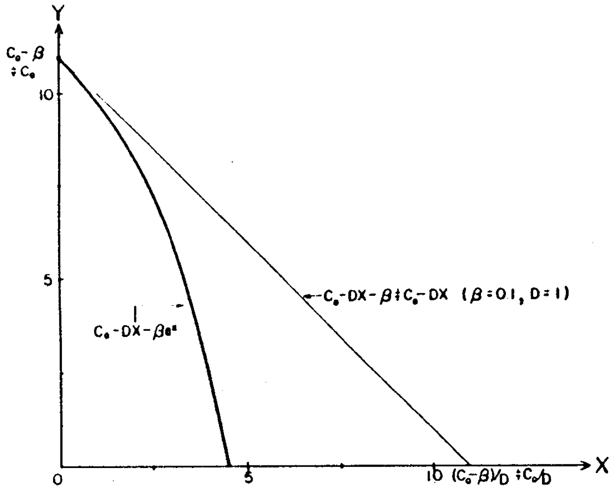

図 3

文　献

1) K. Mogi, Bull. Earthq. Res. Inst. **40** (1962) 831.

2) S. Niiseki, M. Satake and T. Kashiwabara, Progress of Acoustic Emission II, The Japan Society for Non-Destructive Inspection (M. Onoe, K. Yamaguchi and H. Takahashi eds.) (1984), 578.

3) 原　啓明，藤田重次，物性研究　42−1 (1984)，19

4) 岡山誠司，一橋大学研究年報，自然科学 25 (1986) 6 月号，3

有限寿命を考慮した成長模型

中部大・工　　　宮　島　佐　介