

Title	界面のフラクタル次元(拡散に支配された凝集(DLA)とそれに関連した現象,研究会報告)
Author(s)	太田, 正之助
Citation	物性研究 (1987), 48(2): 89-92
Issue Date	1987-05-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/92535
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

界面のフラクタル次元

九大・教養 太田 正之助

I. 誘電破壊モデルの界面フラクタル次元

誘電破壊モデル [1] は、先端からの成長確率が、側面からの成長確率に比べ、先端優先率 R 倍大きいとしてランダムに成長させるモデルである。 $R=1$ の場合は Eden モデル [2] に一致する。このモデルは次式で表わされる平均自由長、枝を出さずに真すぐ伸びる長さの期待値、と呼ぶ特徴的な長さをもっている [1]。

$$L(R) = \sum_{m=1}^{\infty} 2m^2 R^{m-1} \prod_{n=1}^m (R+2n)^{-1} \quad (1)$$

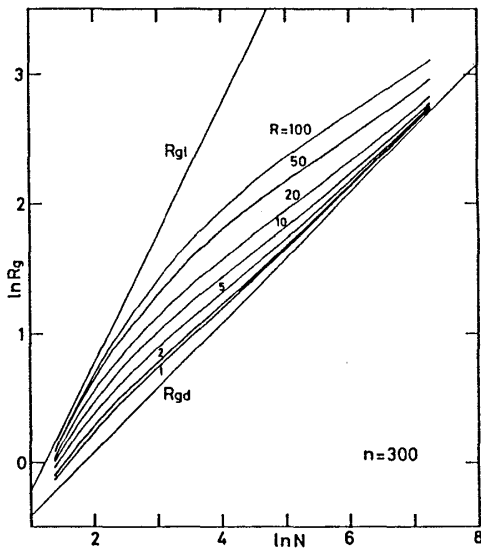


図 1

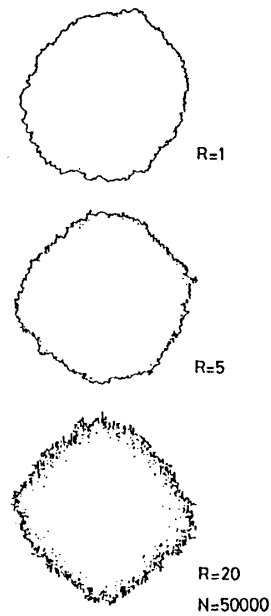


図 2

$R=120$ で $L \approx 10$ の長さとなり、図 1 に示すように、成長開始後の直線的成長から compact なクラスターへの cross over が見られる。ここで、 R_{gl} と R_{gd} は直線と円板の慣性半径、 N は成長数であり、300 サンプルの平均慣性半径 R_g で示してある。図 2 は $N=50000$ のクラスターの界面を描いたもので、compact な中心部に比べ、界面は L の長さ程度の幅で rough なクラスターとなっている。

界面の特徴を調べるため次式で表わされる界面密度相関関数 $C_s(r)$ を導入する。

$$C_s(r) = \frac{1}{S} \sum_i \sigma(\mathbf{r}_i' + \mathbf{r}) \sigma(\mathbf{r}_i') \quad (2)$$

ここで、 σ は界面密度、 S は $\sum_i \sigma(\mathbf{r}_i')$ で表わされる Perimeter 長である。単位界面の midpoint を新たな格子点と考え、界面である場合は1、ない場合を0として(2)式の計算を行った。図3に示すように、 $C_s(r)$ は $r < L$ では界面、 $r > L$ ではクラスターの巨視的な形の特徴を反映して

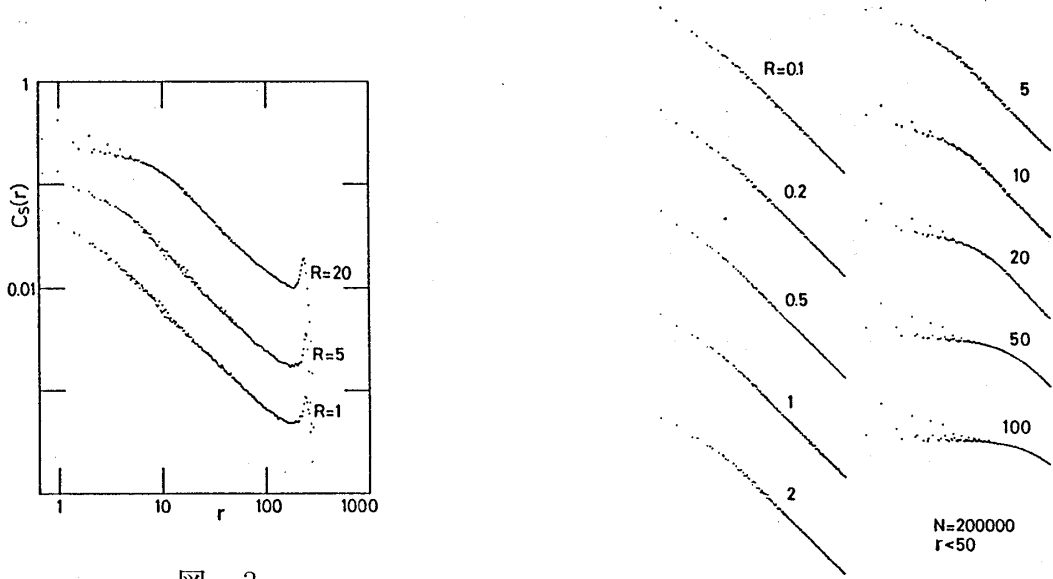


図 3

図 4

おり、 $r \approx 250$ のピークはクラスターの平均直径を表わしている。 $r < L$ の部分の $C_s(r)$ は、格子方向の相関 $C_{s\parallel}(r)$ とその他の方向の平均 $\overline{C_s}(r)$ とに分離して描いてある。 $C_{s\parallel}(r)$ と $\overline{C_s}(r)$ の拡大図が図4に示されており $R > 5$ では傾きの大きい $C_{s\parallel}(r)$ と小さい $\overline{C_s}(r)$ が明確に分離されている。界面密度相関関数の傾き $-A$ から $D_s = d - A$ で求まる界面フラクタル次元 D_s が、 $C_{s\parallel}(r)$ から求めた $D_{s\parallel}$ (×印) と $\overline{C_s}(r)$ から求めた $\overline{D_s}$ (+印) について、 L の関数として図5に示してある。ここで、 d は空間次元を表わし、今の場合 $d = 2$ である。一辺の長さ L

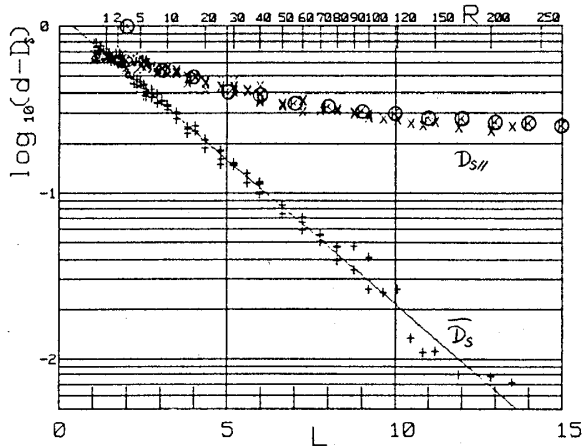


図 5

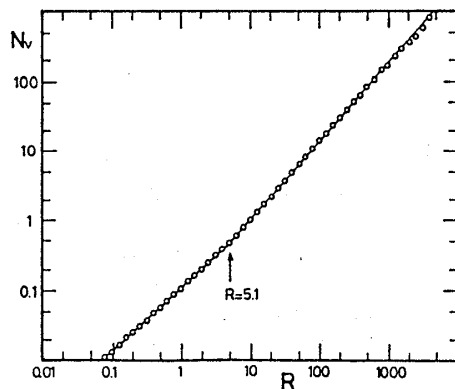


図 6

拡散に支配された凝集 (DLA) とそれに関連した現象の正方形から作られる Quadric Koch Island の Coastline dimension が図中にⓀ印で示してある。

Mandelbrot の FRACTALS によると $L = \text{even}$ では $L_{\max} = L^2/2$, $L = \text{odd}$ では $N_{\max} = (L^2 + 1)/2$ となり, Coastline dimension は

$$D = \log L_{\max} / \log L \quad (3)$$

で表わされる。ここで L_{\max} は一辺 L の正方形を単位長さで分割して作られる Island で可能な海岸線の長さのうち, 最も長くなる場合の辺 L 当りの海岸線の長さである。このような Maximality を満たす Quadric Koch Island の Coastline dimension と $D_{s//}$ は非常に良い一致が見られる。ランダムに成長して形づくられるクラスターの界面が上記 Maximality を満たしているのは興味深い。なお, $L \lesssim 2$ で $D_{s//}$ が Koch Island の次元からはずれるのは, ランダムな成長過程によって界面の幅が 0 になりえないことに帰因することは容易に想像される。

他方, 図 5 から \overline{D}_s は次のように表わされる。

$$\overline{D}_s = d - C \exp(-L/L_c) \quad (4)$$

ここで, $L_c = 2.501$, $C = 0.851$ が図 5 から得られた値である。界面は L の増加とともに入り組み合い, その次元は空間次元に近づいていく。 L_c の値に相当する先端優先率 R_c は約 5.5 であり, 図 2 に示されているクラスターの巨視的な形が R_c を境にして円形からダイヤモンド形に変化していくように見える。方行性をもたせて成長させる計算機シミュレーションから得た巨視的な単位界面当りの平均空孔数 N_v と先端優先率 R との関係を図 6 に示す。ほぼ R_c に等しい $R = 5.1$, $N_v \approx 0.5$ の所で空孔数の増加率が急変している。このように L_c あるいは R_c は空孔がクラスター内に侵入する Critical point に相当しており, 空孔の侵入がクラスターの巨視的な形をダイヤモンド形にしていると考えられる。正方格子上的 DLA でも同様の報告があり, 異方性との関連で興味あるところである。

II. NH_4Cl の DLA 結晶成長におけるフラクタル次元のスペクトラム

密度相関関数や慣性半径の方法で求まるフラクタル次元はクラスター全体の平均的なフラクタル次元であり, その分布を表わすのが $f-\alpha$ スペクトラムである。クラスターの幾何学的形の他に界面に確率という測度を導入し解析するのがこの方法の特徴である。 $f-\alpha$ スペクトラムや一般化された次元 D_q の詳細は他の文献 [3] に譲り, ここでは NH_4Cl の過飽和水溶液で観測された DLA 結晶成長 [4] の実験データをもとに, 今までに得られた結果について報告

する。

成長するDLAでの測度を成長確率すなわち界面に垂直方向の成長速度 v_n と考え、時間差10秒の2枚のデータから図7に示すように v_n を求める。これ界面に沿って表わしたのが図8であり、これから求めた $f-\alpha$ スペクトラムが図9である。図7で明らかなように実験的に得られる測度はDLAの先端近傍のみで、大半の界面では測度が0となる。したがって D_q のうち $q \leq 0$ の部分のスペクトルを求めることはできない。この点をおぎなうため、ラプラス方程

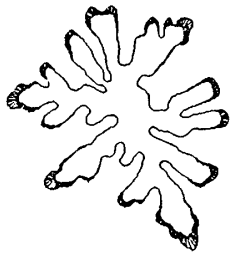


図7

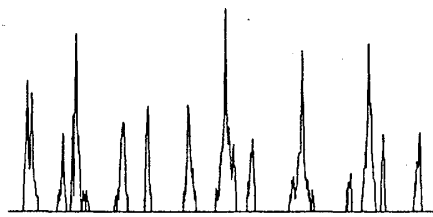


図8

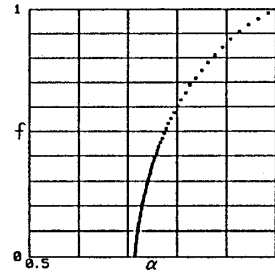


図9

式 $\Delta\phi = 0$ を図10のように計算機で解き、界面での $\Delta_n\phi$ を測度と考え、得られた $f-\alpha$ スペ

クトラムが図11である。この方法では全ての界面で $\Delta_n\phi \neq 0$ であるため、測度の q 乗は $q=0$ のとき全て1となり、 $f = D_0$ の値は(2)式の界面密度相関関数から求めたフラクタル次元と一致する。 $q \rightarrow \pm\infty$ での振舞については実験データの解析と平行して今後検討していく。

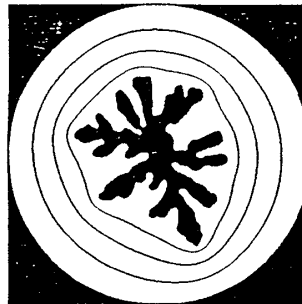


図10

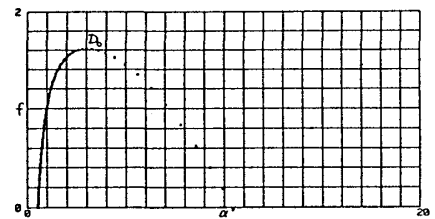


図11

文 献

- [1] 沢田, 太田, 山崎, 本庄, Phys. Rev. A26 (1982) 3557.
- [2] M. Eden, Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability 4 (1961) 223.
- [3] T. C. Halsey et. al, Phys. Rev. A33 (1986) 1141.
- [4] 本庄, 太田, 松下, J. Phys. Soc. Jpn. 55 (1986) 2487.