

## 分数量子ホール効果

名大・理 長岡洋介

### § 1. 量子ホール効果

磁場中の電気伝導はいろいろな形で磁場の影響を受ける。磁場（磁束密度  $B$ ）に垂直に電流  $I$  を流すと、両者に垂直な向きに電場  $E$  が生じる（ホール効果）。電流と電場の関係を

$$I = \sigma_H E \quad (1)$$

と書くと、ホール伝導度  $\sigma_H$  は古典論では

$$\sigma_H = \frac{ne}{B} \quad (2)$$

（ $n$  は電子密度， $-e$  は電子の電荷）と表される。ふつうの導体では、ほぼこのような磁場依存性が見られる。ところが、半導体の界面に生じる2次元電子系では、界面に垂直な強磁場中のホール効果に、図1のような、(2)とは著しく異なる磁場依存性が見出された。図で  $\sigma_H$  の“量子化”された値は厳密に

$$\sigma_H = \nu \frac{e^2}{h} \quad (3)$$

$$\nu = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

である。 $\sigma_H$  が量子化されている領域では電流方向の電場は0になる。これが量子ホール効果である<sup>1)</sup>

磁場中の2次元電子の状態は、エネルギーが

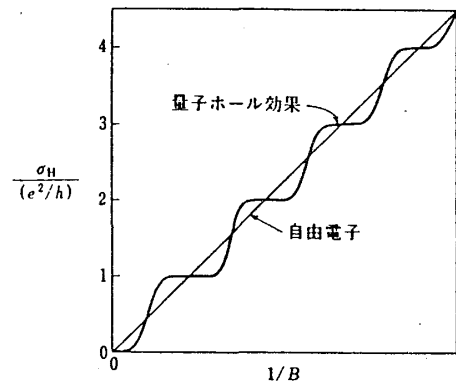
$$E_p = \left(p + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_c, \quad \left(\omega_c = \frac{eB}{m}\right) \quad (5)$$

（ $m$  は電子の質量， $p$  は整数），縮重度が

$$g = \frac{BS}{\phi_0}, \quad \left(\phi_0 = \frac{h}{e}\right) \quad (6)$$

（ $S$  は2次元面の面積）のランダウ準位に量子化される。図1の  $\sigma_H$  の量子化は、電子数  $N$  がいくつかのランダウ準位をちょうど満たす点

$$\nu \equiv \frac{N}{g} = \frac{N\phi_0}{BS} = \text{整数} \quad (7)$$



ホール伝導度の磁場依存性。直線は自由電子，階段状の曲線は量子ホール効果が見られた場合。

図 1

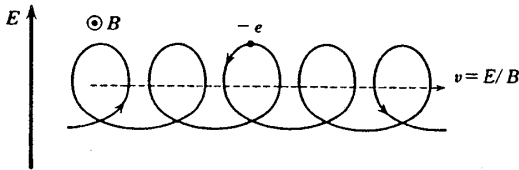
の前後の領域で生じる。

これに加えて、移動度の高い2次元電子系では、(4)  
(7)の $\nu$ が、分母が奇数の分数

$$\nu = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \dots \quad (8)$$

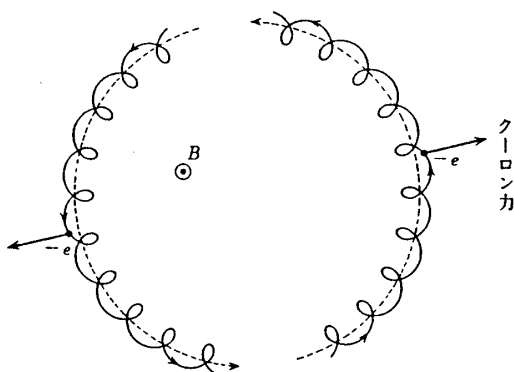
となる量子化も見出された(図2)。この現象が分数  
量子ホール効果である<sup>2)</sup>

整数の量子ホール効果は、2次元面内における不規則なポテンシャルによる電子状態の局在(アンダーソン局在)<sup>3)</sup>と深く関連している。これに対し分数量子ホール効果は、移動度の高い、すなわち不規則ポテンシャルの弱い2次元系でないと見る事ができない。このような系では電子間のクーロン相互作用が重要な役割を果たしているものと思われる。



一様な電場、磁場中の荷電粒子の運動(古典論)

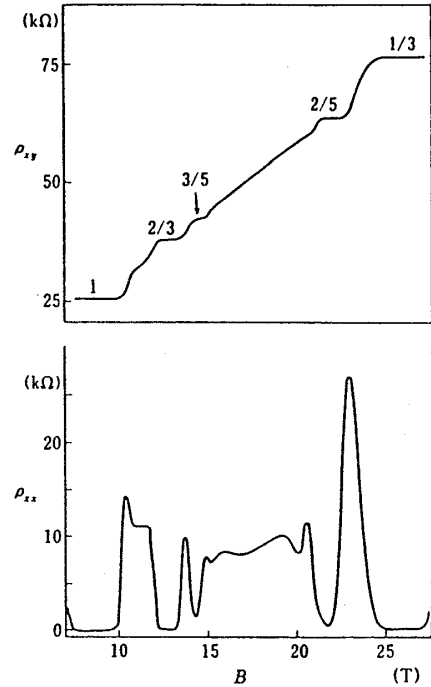
(a)



磁場中の2電子の運動(古典論)

(b)

図 3



異常量子ホール効果の実験結果(Tsuiらによる)  
結果は伝導度ではなく抵抗で与えられている。抵抗と伝導度の関係は、

$$\rho_{xx} = \sigma_{yy} / (\sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{xy}\sigma_{yx}), \quad \rho_{xy} = -\sigma_{xy} / (\sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{xy}\sigma_{yx})$$

となるので、 $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} (= \sigma_l) = 0$  のとき  
 $\rho_{xx} = 0, \quad \rho_{xy} = 1/\sigma_{xy} = 1/\sigma_H$

図 2

## § 2. 強磁場中の2次元電子系

強磁場中の2次元電子系においてクーロン相互作用がどのような役割を果たすかをみるために、まず2電子問題を考える<sup>4)</sup>

古典論では、磁場中の2次元電子は振動数 $\omega_c$ の回輪運動(サイクロトロン運動)を行う。さらに2次元面内に電場が加わると、回転の中心は電場と垂直な向きに等速 $v (= E/B)$ で移動する(図3 a)。2電子の場合、電子間にクーロン力が働くと、それぞれが横ばいをするから、図3 bのような運動をすることになる。

量子論における電子状態もこれとほとんど変わらない。ただ電子は回転するから、その角運動量が量子化されることになる。2電子間の距離が量子化されるといってもよい。Laughlin<sup>5)</sup>は多電子系においても2電子の相関が重要であり、電子対の状態は図2 bのようなものになると考えた。このよう

系においても2電子の相関が重要であり、電子対の状態は図2 bのようなものになると考えた。このよう

な考えに基づき、多電子系の基底状態の波動関数をつぎのように表した。

$$\Psi \propto \prod_{i>j} (z_i - z_j)^m \exp \left[ -\frac{1}{4l^2} \sum_k |z_k|^2 \right] \quad (9)$$

$$l^2 = \frac{\hbar}{eB}$$

ただし、 $z_j = x_j - iy_j$ 、 $(x_j, y_j)$  は  $j$  番目の電子の座標である。 $m$  は 2 電子の回転の角運動量の量子数に当ており、 $\Psi$  が電子の置換に反対称であることから、奇数でなければならない。(強磁場中なので、電子のスピンは 1 方向に揃っている。)

(9) の Laughlin 状態では、電子は図 3 b のように離れて運動していて、クーロン・エネルギーが低くなっている。しかし、電子間距離が量子化されているので、このような状態が実現するのは、電子密度がある定まった値のときに限られる\*。すなわち、(9) の状態はランダウ準位がちょうど  $1/m$  だけ充たされたとき ( $N = g/m$ ) に実現する。これはいいかえれば、2次元面内に電子が磁束  $m\phi_0$  に 1 個の割合で存在するときに当たっている。また、この状態は  $m$  重に縮退していて、ホール伝導度が

$$\sigma_H = \frac{1}{m} \frac{e^2}{h} \quad (10)$$

となることも示すことができる。

### § 3. Laughlin 状態の素励起

電子数が  $\nu = N/g = 1/m$  からわずかずれたときには、どのような状態が実現するだろうか。電子数のずれが小さければ、電子系全体で Laughlin 状態が壊れるより、ずれの分が Laughlin 状態中に一種の欠陥として存在する方がエネルギーが低い。電子が足りない場合に生じる欠陥を模式的に画くと、図 4 のようになる。すなわち、全体としては磁束  $m\phi_0$  に 1 個の割合で電子が分布し、磁束  $\phi_0$  分のすき間が生じる (図は  $m=3$  の場合)。この欠陥には、局所的に電子  $1/m$  個分が不足しているから、欠陥は  $e/m$  の有効電荷をもつと考えてよい。

このような欠陥は、Laughlin 状態に対する素励起とみることもできる。欠陥の広がりはおおよそ  $l$  であるから、その励起エネルギーは、

$$\Delta E \sim \frac{e^2}{m^2 l} \quad (11)$$

である。

\*) したがって、この状態は一種の非圧縮性流体である。

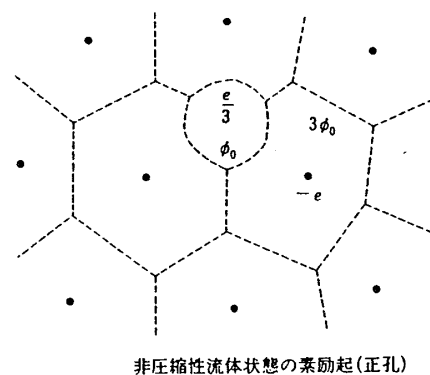


図 4

この素励起のもう一つの興味深い性質は、それが“分数統計”に従うとみられることである。<sup>6)</sup> 2個の素励起の波動関数を  $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  と書くと、その置換に対する対称性は、ボース統計でもフェルミ統計でもなくて、

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = e^{2\pi i/m} \Psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \quad (12)$$

になる。ただし、このような統計が系のどのような物理的性質に反映するかは明かでない。

#### § 4. おわりに

以上、分数量子ホール効果とそれに対する Laughlin の理論を紹介した。Laughlin 状態は新しい型の量子的な流体状態としてたいへん興味深い。これによって、分数量子ホール効果の現象は基本的に説明されたと思う。しかし、この状態がどのような秩序状態であるのか、そこになんらかの秩序パラメータが存在するのか、存在するとすればそれは何か、温度を上げていったとき状態はどのように変化するのか、などの問題はまだ解明されていない（少くとも私にはわからない）。この問題がトポロジーやアノマリーとどう関係するかは知らないが、非常に興味深い問題であることは確かだ。

- 1) K. von Klitzing, G. Dorda & M. Pepper: Phys. Rev. Letters **45** (1980), 449.  
解説として  
長岡洋介：「超低温の物性物理」（阿部竜蔵，斯波弘行編，1986 培風館）p. 23.
- 2) D. C. Tsui, H. L. Störmer & A. C. Gossard: Phys. Rev. Letters **48** (1982), 1559.
- 3) 解説として、  
長岡洋介：日本物理学会誌 **40** (1985), 489.
- 4) R. B. Laughlin: Phys. Rev. **B27** (1983), 3383.
- 5) R. B. Laughlin: Phys. Rev. Letters **50** (1983), 1395.
- 6) B. I. Halperin: Phys. Rev. Letters **52** (1984), 1583.  
D. Arovas, J. R. Schrieffer & F. Wilczek: Phys. Rev. Letters **53** (1984), 722.

### Induced Charge on a Torus

名大・理 中谷 一（発表者）  
愛知大・教養 長谷部 勝也（共同研究者）  
名大・理 野々山 龍彦（ ” ）

2 + 1 次元時空における外部磁場中での massive フェルミオン系の Induced Charge を、Torus 上