2. アノマリー

$$L(x)=\Phi^{\dagger}(x)\,D\Phi(x)$$

なるラグランジアン密度で与えられる量子化された Dirac 場$\Phi(x)$の理論を考える。$G(x)$を行列関数とし

$$J[x\,;G]=\Phi^{\dagger}(x)\{G(x),D\}\Phi(x),$$
$$J_{\mu}[x\,;G]=\Phi^{\dagger}(x)\,i\Gamma_{\mu}G(x)\Phi(x)$$

として，藤川の方法によって計算すれば

$$<\partial_{\mu}J_{\mu}[x\,;G]>_0=<J[x\,;G]>_0+A[x\,;G]$$

となる。右辺の$A[x\,;G]$がアノマリー項であり，

$$A[x\,;G]=\frac{2}{(2\pi)^n}\lim_{\beta\to 0}\int d^nq\,\mathrm{tr}\left\{G(x)\exp\left[-\beta(D-\not{q})^2\right]\right\}$$

で与えられる。結果は正則化因子$k(\beta D^2)$のとり方によらない。GをΓ_{n+1}や$i[\Gamma_{n+1}\Lambda, D]$のようにとればノン・トリビアルな$A[x\,;G]$が得られ，

$$\int d^nx\,A[x\,;\Gamma_{n+1}]=2V(0),$$
$$\int d^nx\,A[x\,;i[\Gamma_{n+1}\Lambda, D]]=2U(0)$$

等となる。紙幅の関係で具体的なモデルについての計算は省略する。詳細については

1) M. Hirayama, Topological invariants for Dirac operators on open spaces, Phys. Rev. D33 (1986) 1079.

2) M. Hirayama and N. Sugimasa, Novel topological invariants and anomalies, Phys. Rev. D vol. 35, No. 2 (1987).

を参照されたい。

Berry's Phase, Schwinger Term and Explicit Calculations in Two Dimensions

名大・理　細　野　　忍

§1. 序

外部変数を持つ量子力学系の断熱過程には，一般に，変数空間のトポロジーに起因する Berry の位相[1)]

が現れる。そこで第一に，この位相が，断熱定理の証明のどこに現れるのかを明らかにする。

一方，Chiral anomaly を Hamilton 形式で解釈することが，Berry の位相を用いてなされている[2]。そこで第二に，この議論を正準量子化の立場から定式化し，Berry の位相と，ゲージ対称性 $\mathcal{G}^{(3)}$の ray 表現との関係を明らかにする。

§ 2. 断熱定理と Berry の位相

ここでは，Messiah[3]の証明の中に自然に Berry の位相が現れていることを指摘する。

＝断熱定理[3]＝

Schrodinger 方程式

$$\begin{cases} i\dfrac{d}{dS}U_T(S) = TH(S)\,U_T(S) \\ U_T(S=0) = 1 \end{cases} \tag{1}$$

が決める evolution operator は

$$U_T(S) \xrightarrow[(T\to\infty)]{} A(S)\,\Phi_T(S) \tag{2}$$

を満たす。ここで，A(S) は

$$\frac{d}{dS}A(S) = -K(S)\,A(S),\quad K(S) = -\sum_j P_j(S)\,\frac{d}{dS}P_j(S) \tag{3}$$

が定めるユニタリー operator 。

Hamiltonian が $H(S) = H(x_1(S), x_2(S), \cdots, x_n(S))$ である場合には，operator A は

$$A(x(S)) = P\exp\left(-\int_0^S K(x(\tau))\,d\tau\right) \tag{4}$$

と書かれる。この表式で，Path ordering が出てくることからもわかるように，一般にAは Path 依存性を持つ。これが Berry の位相であることが示される：実際，計算により，

$$\begin{aligned}(\text{曲率}) &= dK + K^2 \\ &= \sum_j |u_j)(u_j|\overleftarrow{d}(1-P_j)\,d|u_j)\end{aligned} \tag{5}$$

ここで，$u_j = u_j(x)$ s. t. $H(x)\,u_j(x) = E_j(x)\,u_j(x)$ である。この式は，U(1)-Berry 位相の式[1]に他ならない。また，E_j が縮退しているときは

$$P_j \equiv \sum_a |u_j^a)(u_j^a| \tag{6}$$

のように考えればよく，このとき(5)式は

$$(\text{曲率}) = \sum_{a,b} |u_j^a)(dU + U^2)^{ab}(u_j^b|$$

となる。但しここで，$U^{ab} \equiv (u_j^a|d|u_j^b)$ と定義した。この表式は，Wilczek, Zee[4]によって見出された non-abelian Berry 位相である。

このように，Berry の位相は，断熱定理の証明の中に，operator A の持つ Holonomy として自然に含まれているのである。従って operator A を幾何学的に考察することによって，Berry 位相のそうした性質を知ることができる。

なお Φ_T は，Dynamical な位相因子であり重要ではない。(この節で用いた量の詳しい定義は，文献 3) を御覧下さい。)

§3. ゲージ対称性 $\mathcal{G}^{(3)}$ の表現

あるゲージ配位 $A \in \mathcal{A}^{(3)}$ の所で，$\mathcal{G}^{(3)}$ の表現を構成することは，$a_n|0>_A = b_r|0>_A = 0$ をみたす生成消滅演算子についてのゲージ変換を

$$\begin{pmatrix} a_n^g \\ b_r^{g\dagger} \end{pmatrix} = (<g>_{ij}) \begin{pmatrix} a_n \\ b_r^\dagger \end{pmatrix} = U_g \begin{pmatrix} a_n \\ b_r^\dagger \end{pmatrix} U_g^\dagger \tag{7}$$

のように表す U_g を求めることである。これは実際に構成することが出来て，

$$U_g = P\exp(-\int_1^g Q_g^r), \quad Q_g^r \equiv :\alpha_i^{g\dagger} < dg^{-1} \cdot g >_{ij} \alpha_j^g:$$

と書くことが出来る。ところが，Q_g^r を正規積で正則化するために，

$$d\,Q_g^r + Q_g^{r2} = -\mathrm{Tr}\,P_- < g^{-1}dg > P_+ < g^{-1}dg > \tag{8}$$

のように，U_g は Path 依存性を持ち ray 表現となる。

U_g を $|0> \equiv |0>_A$ に作用すれば，(7)を Bogoliubov 変換と見て得られる真空 $|0>_g$ に，up to phase で一致すべきであるから

$$U_g|0> = e^{i\alpha(g)}|0>_g \tag{9}$$

と書かれる。両辺を微分することによって

$$Q_g^r U_g|0> = i\,d\alpha\, e^{i\alpha(g)}|0>_g + e^{i\alpha(g)}d|0>_g$$

となるが，$<0|U_g^\dagger Q_g^r U_g|0> = 0$ であるから

$$i\,d\alpha = {}_g<0|d|0>_g$$

となる。これより Berry の位相との関係が，

$$d\left\{{}_g<0|d|0>_g\right\} = \mathrm{Tr}\,P_- < g^{-1}dg > P_+ < g^{-1}dg >$$

であることがわかる。以上，詳しくは論文 5) を御覧下さい。

§ 4. 結論および課題

正準量子化の手続きによって Berry の位相と $\mathcal{G}^{(3)}$の ray 表現の関係が明らかにされた。さらに定量的な議論が期待される。[5]

参考文献

1) M. V. Berry; Proc. R. Soc. Lond. **A392** (1984) 45.
B. Simon; Phys. Rev. Lett. **51** (1983) 2167.
径路積分の立場からは
H. Kuratsuji and S. Iida; Prog. Theor. Phys. **74** (1985) 439; Phys. Rev. Lett. **56** (1986) 1003.

2) P. Nelson and L. Alvarez-Gaumé; Comm. Math. Phys. **99** (1985) 103.
H. Sonoda; Phys. Lett. **156B** (1985) 220; Nucl. Phys. **B266** (1986) 410.
A. Niemi and G. Semenoff; Phys. Rev. Lett. **55** (1985) 927; Phys. Rev. Lett. **56** (1986) 1019.

3) A. Messiah; "Quantum Mechanics", (North-Holland, 1962).

4) F. Wiclzek and A. Zee; Phys. Rev. Lett. **52** (1984) 2111.

5) S. Hosono; DPNU-86-44.
S. Hosono and K. Seo; in preparation.

Fractional Charges on Monopoles : a manifestation of anomaly

都立大・理　南　方　久　和

magnetic monopole に fractional charges, とくに electric charge が induce されるという現象についての基本的考え方を要約し，より最近の発展についてもふれたい。

非自明なトポロジーを持った background に Fermi 場が couple している状況では種々の興味深い現象が起ることが知られている。例えば fermion fractionization, monopole による陽子崩壊の触媒効果, cosmic string の超電導性などである。今日はこのうち第一の fermion fractionization（以下FFと略称）に焦点をあて，Jackiw-Rebbi [1]以来よく確立されていると思われる fermion 数の他に electric charge の fractionization が chiral anomaly を通じて起ることを示す。

1. Fermion number fractionization

トポロジカルに非自明な background soliton 場中での Fermi 場は index定理で指定されるいくつかの zero mode を持つことが知られている。この zero mode に伴う operator は Clifford代数 $\{b_i,$