よび $(\rho_c \ln \rho_c)_c \neq \rho_{cc} \ln \rho_{cc}$ より，S_H，S_{cc} は，時間的に増大する可能性がある。図3に S_H と S_{cc} の時間変化を示す。S_H と S_{cc} は，ともに時間的に増大する。最初，両者は，ほぼ一致するが量子力学的な干渉がおきると $S_H < S_{cc}$ となる。このことは量子系の方が古典系よりも，規則的であることを示していると考えられる。

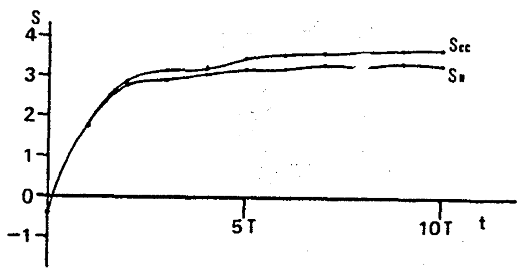


図3. エントロピー。S_H と S_{cc} の時間発展

ハミルトニアン行列の乱雑さとエネルギーレベルの統計的性質

早大・理工　首藤　啓
東工大・理　松下利樹

古典系にみられるカオスが，対応する量子系にいかに反映するかということをみるのに最近接レベル間隔分布は，一つの指標と考えられている。古典極限が可積分であるとき，一般にはポアソン分布となることが示される。また系のカオスの程度が強くなるに従って，ランダム行列理論のガウス型直交アンサンブル(GOE)から導かれるウィグナー分布に近づくことが数値計算で確かめられている (Fig. 1 (a)(b))。

しかしながら，現実には，ハミルトニアン行列の行列要素は決定論的に決められたものであり，相当大次元の行列が考察されているとはいえ，我々の解析範囲内での次元は有限であり，どの程度まで「確率変数」とみなすことができるかは自明ではない。また，Fig. 1 にみるような古典系における低次共鳴に対応すると考えられるパラメーター領域での細かな振動構造がランダム行列の概念で記述可能かどうかは問題といわざるをえない。

我々の解析するハミルトニアンは，

1. モース系

$$H = H_1 + H_2 + H_{12} \tag{1}$$

$$H_i = -\left(\frac{\hbar^2}{2\tilde{m}_i}\right)\frac{\partial^2}{\partial r_i^2} + V_i(r_i) \qquad i = 1, 2$$

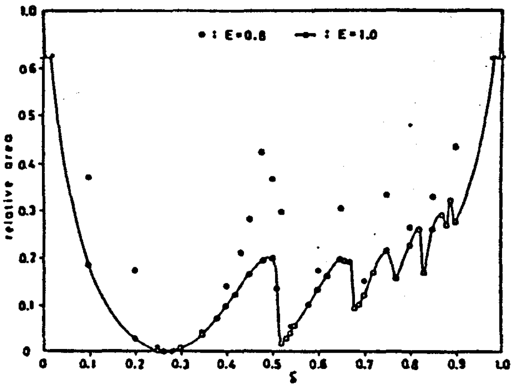
$$H_{12} = \hbar^2 \mu_2 \left(\frac{\partial}{\partial r_1}\right)\left(\frac{\partial}{\partial r_2}\right)$$

$$\widetilde{m}_i = (\mu_1 + \mu_2)^{-1}, \quad \mu_i = m_i^{-1},$$

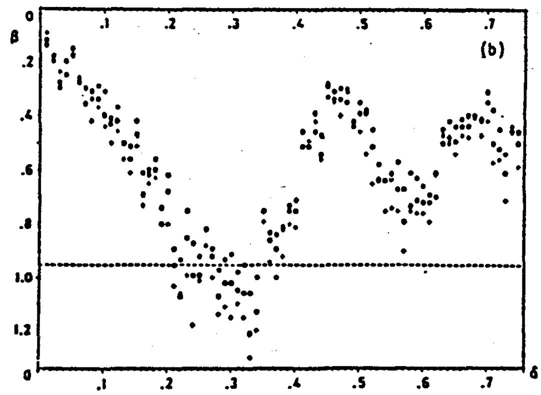
$$\delta = \left(1 + \frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{-1}$$

$$V_i(r_i) = D_i \left[\exp(-a_i r_i) + 1 \right]$$

$$i = 1, 2$$



(a)



(b)

Fig. 1 (a) (q_1, p_1)断面におけるカオス領域の質量比依存性。実線又はプロットより上の領域が全面積に対するカオス領域の相対面積をあらわす。

(b) ブロディパラメーター β の質量比 δ による変化（図中，点線はランダム行列理論からの β の値，$\beta = 0$ のときポアソン分布に対応）。

2. 4次同次系

$$H = H_1 + H_2 + H_{12} \tag{2}$$

$$H_i = \frac{1}{2}\left(p_i^2 + \frac{\alpha}{4} q_i^4\right)$$

$$i = 1, 2$$

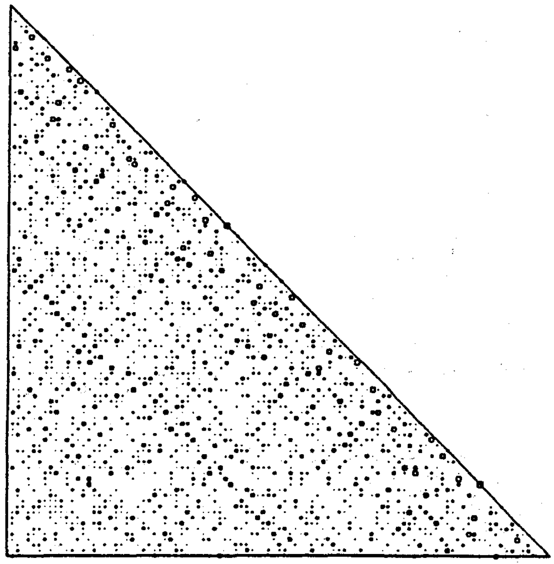
$$H_{12} = \frac{\alpha c}{4} q_1^2 q_2^2$$

である。

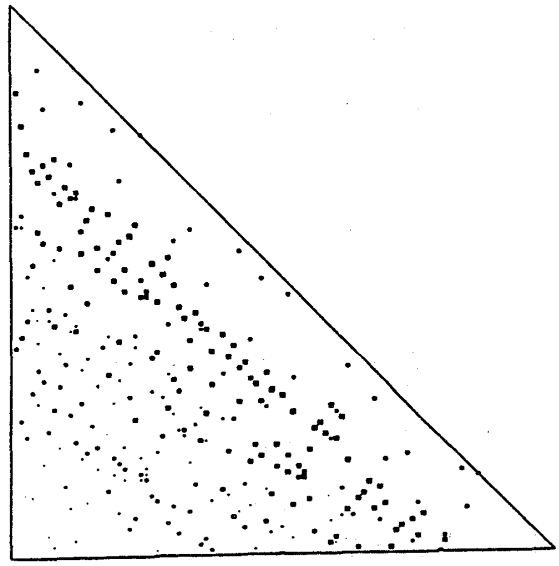
まず，それぞれのハミルトニアン行列の空間的な値分布の様子を示す（Fig. 2 (a),(b)）。ここで展開基底として，モース系の場合は1次元モースポテンシャルの直積，4次同次系の場合は1次元調和振動子の直積をそれぞれ用い，対角要素の値がエネルギーの小さい順となるように並べた。モース系は，対角要素にほぼ平行に比較的同程度の大きな値が並び，対角要素から離れるに従って値は小さくなる。4次同次系の場合は，対角要素付近に帯状に正の値が並ぶ以外の圧倒的多数の行列要素は0である（図では，全体の一部のみを示し，対角要素の値は，非対角要素に比べて非常に大きいので省いてある）。この空間的な値の分布を次の2次相関関数

$$c_{ij} = \sum_{k,l} (H_{k,l} - \langle H \rangle)(H_{k+i,l+j} - \langle H \rangle) \tag{3}$$

を用いて調べた結果を Fig. 3 (a)～(f) に示す。 対角要素が非対角要素に比べて大きいことを



(a)



(b)

Fig. 2 空間的値分布。四角の大きさは行列要素の値の大きさに比例。黒が正，白が負に対応。(a) モース系 (b) 4次同次系

反映して，対角要素を含めた相関関数をみると $i=j$ 方向の相関が他の方向の相関をおおいかくすので，ここでは Fig. 1 のような非対角要素のみの相関をみる。上段（Fig. 3 (a),(c),(e)）は，対角要素を小さい順に並べたもので，下段（Fig. 3 (b),(d),(f)）は対角要素を randomize したものである。また，Fig. 3 (e),(f) は，行列要素に一様乱数をふった乱数行列の場合を示した。一様乱数を行列要素としたものは当然のごとく対角要素の並べ方に依らずにデルタ相関を示すが，モース系，4次同次系は対角要素の並べ方によって，異った相関を示す。このことは，実際のハミルトニアン行列の行列要素は，その空間的配置（つまり基底の並べ方）に対して完全にランダムとは言えないことを示している。

次に，この配置間相関が決定論的な起源を持つことを示すために以下の解析を行った。

まず，対角要素を小さい順に並べ，非対角要素を対角要素と切り離して randomize する。そうして得た行列を対角化し（その結果得に固有値列はもとのハミルトニアンの固有値列とは異なる），その最近接レベル分布をもとのものと比べる。randomize の方法として，非対角要素を区別なく完全にまぜる場合と，対角要素に平行な一列の並びの間だけで値を交換して randomize する場合の2通りを試みた。その結果を Fig. 4 に示す。ただし，横軸はそれぞれの系のカオスの割合をコントロールするパラメータで(1),(2)式内で与えられているものである。これからもわかるように，具体的なハミルトニアンの行列要素間の空間的配置の相関は，最近接レベル分布に確かに効いていることがわかり，その事実からも，行列要素間のランダムネスは，完全な統計的独立性をもっていないものと考えられよう。

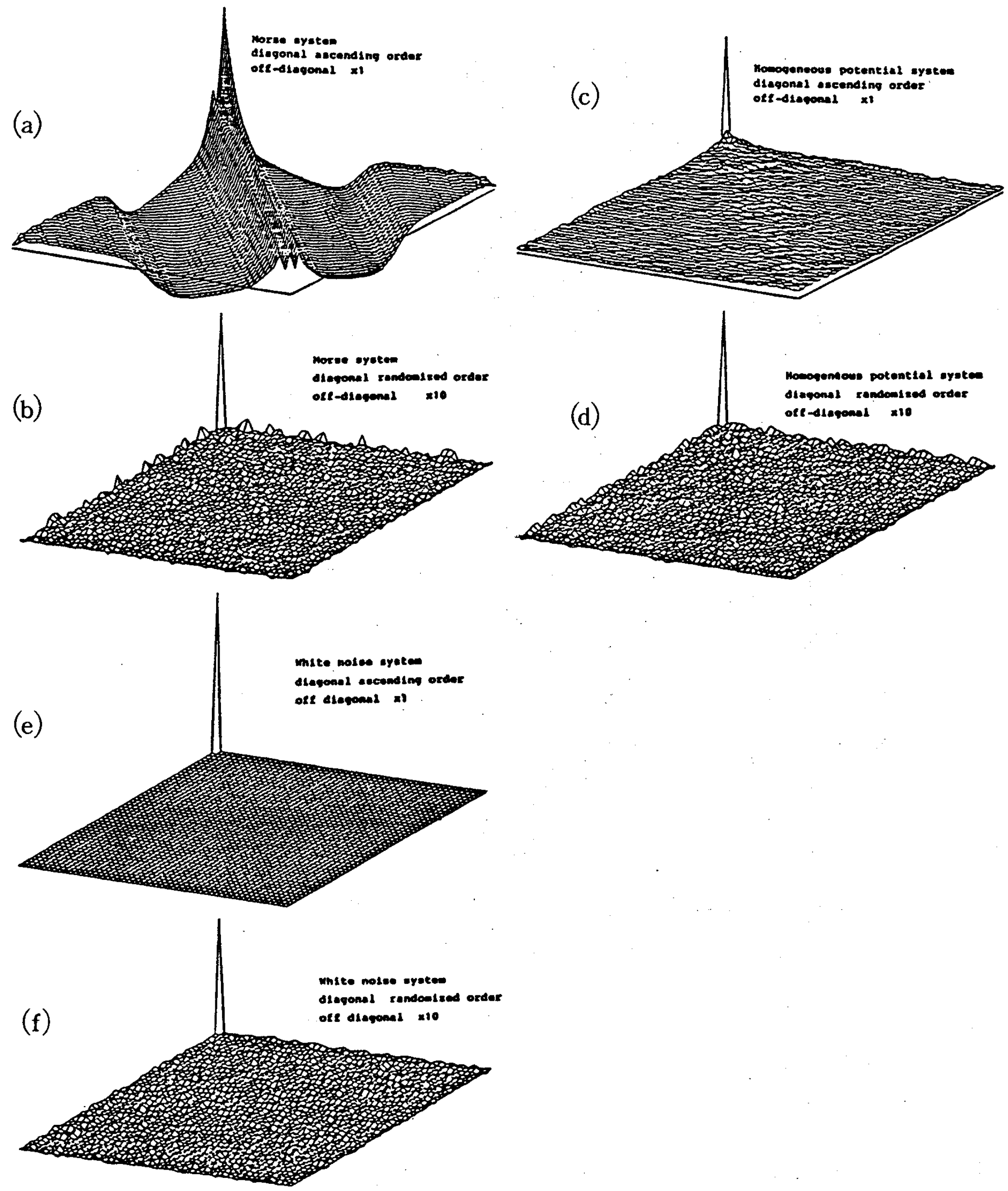


Fig. 3　2次元相関関数

(a)　モース系（対角要素を小さい順）

(b)　モース系（　　〃　randomize）

(c)　4次同次系（　〃　小さい順）

(d)　4次同次系（　〃　randomize）

(e)　乱数行列（　　〃　小さい順）

(f)　乱数行列（　　〃　randomize）

我々が以上で解析した行列要素間の相関は，言うまでもなく展開基底に依存する。その意味で基底に無関係に，上で得られた行列要素間の強い相関が残るか否かは未解決の問題である。しかし，ユニタリ変換で関係づけられる故，異なる基底で展開しても一方に強い相関があれば，他方にも何らかの形で（上で用いた2次相関関数でとらえられるかどうかは別として），相関

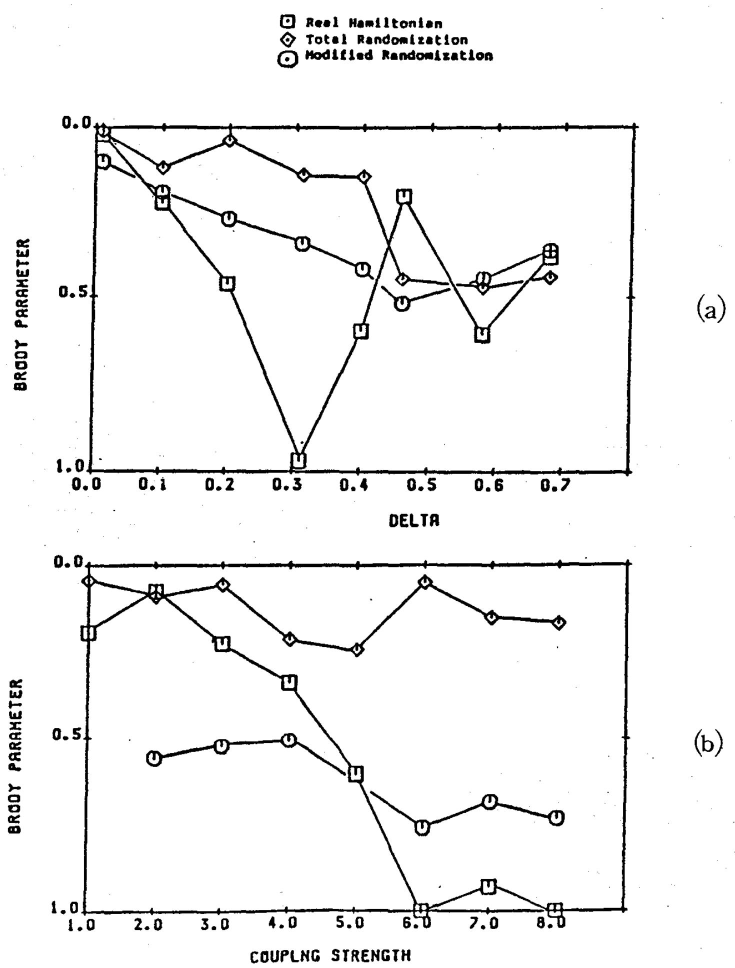


Fig. 4 対角要素と，非対角要素を切り離して randomize したときの最近接レベル分布の変化。
(a) モース系， (b) 4次同次系

が残ることは期待でき，基底に independent な量 (tr H, tr H^2, $\cdots$) によってそれをとらえることは今後の課題であろう。

一次元ランダム系の統計的性質

早大・理工 相沢洋二，首藤 啓，胡桃 薫
新潟大・工 合田正毅

一次元差分型シュレディンガー方程式

$$\phi_{n+1} + (-2 - V_n) \phi_n + \phi_{n-1} = E \phi_n \quad (n = 1, 2, \cdots, N)$$