

Title	Global Structures of Type III Intermittent Chaos
Author(s)	黒木, 昌一; 徐, 丙鉄; 岡本, 寿夫; 森, 肇
Citation	物性研究 (1987), 48(4): 382-385
Issue Date	1987-07-20
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/92605">http://hdl.handle.net/2433/92605</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

## Global Structures of Type III Intermittent Chaos

九大・理 黒木昌一，徐 丙鉄  
岡本寿夫，森 肇

### §1. Introduction

散逸系で，周期軌道が不安定化し，その時に，その不安定周期軌道の近傍に系を引きもどす機構（再投入）が存在すると，系の運動は，以下のようなものになる。不安定周期軌道の近くにあった系は，その軌道に沿って，周期的な運動をしながら，少しずつ遠ざかってゆく（ラミナー状態）。そして，周期軌道からのずれが，ある程度大きくなると，急激に周期運動から遠ざかってしまう（バースト）。そのあと，すぐに不安定周期軌道に引き戻され（再投入），同じことを繰り返す。この時バーストの起こる時間間隔が不規則になっているのが，間欠的カオスである（図1）。

間欠的カオスは，不安定性の違いにより，Type I, II, III と3つに分類されている。（Pomeau-Manneville）<sup>1)</sup> ポアンカレ断面をとることによって得られる写像は以下のようになる。

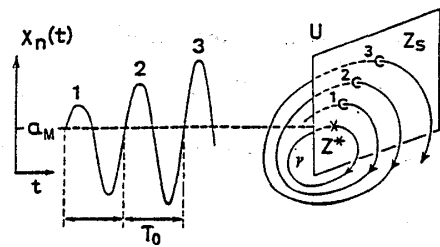


図1. 不安定周期軌道  $r$  と，それにそって周期運動をしながら，離れてゆく軌道。

$$\text{Type I : } X_{s+1} = \varepsilon + X_s + X_s^2 \quad (1)$$

$$\text{Type II : } \begin{cases} Y_{s+1} = (1 + \varepsilon) r_s + r_s^3 \\ \theta_{s+1} = \theta_s + \rho_0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Type III : } X_{s+1} = -(1 + \varepsilon) X_s + \beta X_s^2 - X_s^3 \quad (3)$$

間欠的カオスから，得られる時系列を模式的に描くと図2のようになる。この時系列をランダムに起こるバーストで区切られた，ラミナー状態が連ったものとみなすと，時系列は，ラミナー状態の寿命  $\tau_n$ ，バースト前後の位相の飛び  $\xi_n$ ，固有振動の振幅変調で特徴づけられる。異ったラミナー状態は，互いに統計的に独立であると仮定して，上の3つの統計的性質を与えることによって，時系列のパワースペクトルの固有振動数  $\omega_0$  のまわりの形を表す式を書くこ

とができる。さらに、Type I について、一次元写像(図3)を使うことによって、 $\tau_n$  の特性関数と、振幅変調によるパワースペクトルへの寄与が、再投入の確率分布を与えれば、式を書くことができる。

そして、間欠的カオスの発生点の直後では、パワースペクトルが、 $\omega_0$  のまわりで振動数の逆ベキ則に従うことが示される。また、再投入のし方によってスペクトルの形は異なり、ノーマルな再投入では、 $\omega_0$  のまわりに、スペクトル線の列があらわれ、それらの頂点の包絡線が逆ベキ則に従い、その指数は2または3となる。また、特殊な再投入では、連続スペクトルが逆ベキ則に従い、指数は1となる場合も出てくる。<sup>2)</sup>

ここでは、 $\omega_0$  のまわりでの議論を  $m\omega_0$  ( $m=0, 1, 2, \dots$ ) の場合に拡張した結果について示す。

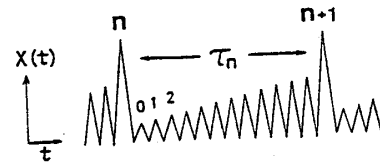


図2. 間欠的カオスの時系列の概念図。

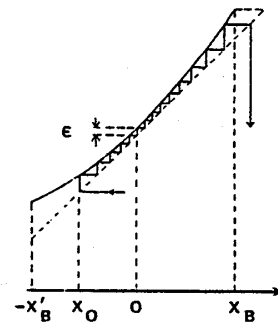


図3. Type I のラミナー状態を表す一次元写像。

## §2. パワースペクトルの統計理論

前にも述べたように、間欠的カオスのパワースペクトルは、ラミナー状態の継続時間  $\tau_n$  , バースト前後の位相の飛び  $\xi_n$  , ラミナー状態での振幅の変化の統計的性質を与えることにより、式を書くことができる。具体的には、以下の量である。

$$\langle \exp[-i\omega\tau_n] \rangle = \exp[-i\nu\tau(\nu) - \gamma(\nu)] \tag{4}$$

$$\langle \exp[i(\omega/\omega_0)\xi_n] \rangle = \exp[i\xi(\omega) - \eta^2(\omega)] \tag{5}$$

$$\langle b_n(\omega) \rangle = \rho B(\nu) \tag{6}$$

ただし、
$$b_n(\omega) \equiv \frac{T_0}{\tau_c} \sum_{s=0}^{\tau_n/T_0} X^{(n)} \exp(-i\omega T_0 s)$$

$$\nu \equiv \tau_c \omega, \quad T_0 \equiv \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$T_0$  は、固有振動の周期、 $\tau_c$  は、特性時間、 $X_s^{(n)}$  は、 $n$  番目のラミナー状態の時系列の  $s$  番目のピーク値を表わしている。ここで、 $\omega_0$  のまわりから  $m\omega_0$  のまわりへ拡張するために行なった変更は、結果的には、(5)式の  $\xi_n$  の係数  $\omega/\omega_0$  をつけ加えただけである。

また、スペクトルを表す式は、以下のようである。

ノーマルな再投入の場合：

$\omega = 0$  のまわり

$$S(\nu_k) \equiv \frac{4\sqrt{1+\pi^2} x_B^2 \delta}{\pi} \frac{1}{\nu_k}$$

$$\nu_k = 2\pi k / \tau(\nu_k) \quad (k = 1, 2, \dots), \quad \delta = \sqrt{\varepsilon} / \pi x_B$$

$\omega = m\omega_0$  のまわり ( $m = 1, 2, \dots$ )

•  $\eta^2 \ll 1$  のとき

$$S(\nu_k) = \frac{4(1 - \cos \xi)}{\{\eta^2 + (\pi\delta/2)|\nu_k|\} \nu_k^2}$$

$$\nu_k = (\xi + 2\pi k) / \tau(\nu_k) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

•  $\eta^2 \gg 1$  のとき

$$S(\nu) \simeq (\tau_c / \tau) \{2 / \hat{\nu}^2\} [1 - e^{-\tau} \cos(\hat{\nu} \tau)]$$

$$\hat{\nu} = \tau_c (\omega - m\omega_0)$$

$m\omega_0$  のまわりを見るとき、 $m$  を大きくすると(4)式の  $\xi_n$  の係数が大きくなり、 $\eta^2$  が大きくなってゆくの、得られるスペクトルの形は図4(a)のようになる。また、 $1/\omega$  のスペクトルが現れる再投入の場合は、形は  $m$  の大きさに依らず、図4(b)のようになる。

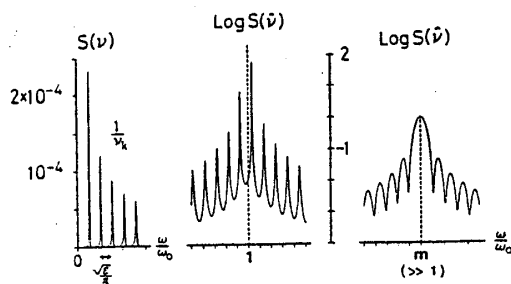


図4 (a)

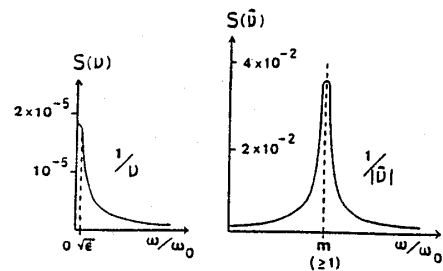


図4 (b)

図4. Type I 間欠的カオスのパワースペクトル。

## References

- 1) Y. Pomeau and P. Manneville: Commun. Math. Phys. 74 (1980) 189.
- 2) I. Procaccia and H. Schuster: Phys. Rev. A28 (1983) 1210.
- 3) H. Mori, K. Shobu, B. C. So and H. Okamoto: Physica Scripta T9 (1985) 27.
- 4) 森 肇:月刊フィジクス, 第6巻 第9号(1985年, 海洋出版) 488頁。  
吉田 健, 岡本寿夫:月刊フィジクス, 第6巻 第9号(1985年, 海洋出版) 522頁。
- 5) 森 肇, 岡本寿夫:「乱流現象の科学」第5章(巽 友正編, 東京大学出版会, 1986年) 121 - 163頁。
- 6) B. C. So and H. Mori: Physica 21D (1986) 126.  
H. Mori, B. C. So and S. Kuroki: Physica 21D (1986) 355.
- 7) H. Mori, H. Okamoto, B. C. So and S. Kuroki: Prog. Theor. Phys. 76 (1986) 784.

## 離散写像における間欠的カオスのパワースペクトル特性

九大・理 森 信之, 黒木昌一, 森 肇

タイプ I 間欠的カオスのダイナミクスを, パワースペクトルを用い, 数値実験で調べた。計算で使ったモデルは, 離散写像  $X_{n+1} = \mu - X_n^2$  である。これは  $\mu = \mu_c = 1.75$  で周期 3 の軌道が接線分岐を起こし,  $\mu < \mu_c$  で間欠的カオスとなる。  $\varepsilon = \mu_c - \mu$  として,  $\varepsilon = 10^{-6}$  の時のパワースペクトルが図 1(a) である。

ところで, 我々が興味があるのはスペクトルの全体的な形ではなく, そこに内在する, 系の詳細によらない普遍的な性質であり, それ故, 以後  $f = 0$  近傍と  $f = f_0$  (基本周波数。ここでは,  $1/3$ ) 近傍に注目することにする。図 1(b) は, それぞれの周波数域を拡大してみたものである。すると驚くことに, スペクトルのひとつの山と思っていたものが, 小さなピークの列から成っていたことが判明した。これは, いままで唯一, 森肇らの「パワースペクトルの統計理論」〔文献 1〕によって予想されていた特性である。その他の理論<sup>(2)</sup>では, ラミナーのライフタイム分布を  $\tau^\alpha$  という単調減少の形で扱っており, これは実験で得られた分布(図 2)を正しく評価していない。図 2 では  $\tau \approx 420$  のところに大きなピークがあり, 原点の周りのピークの数十倍もあるので, スペクトルにはむしろこちらの方が効いていると思われる。

〔文献 1〕によれば, このようなときにはタイムスケールがうまく分離され, 図 1(b) のよう