

Title	Global Spectral Structures of Type III Intermittent Chaos
Author(s)	岡本, 寿夫; 森, 肇; 黒木, 昌一
Citation	物性研究 (1987), 48(4): 378-381
Issue Date	1987-07-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/92606
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

Global Spectral Structures of Type III Intermittent Chaos

九大・理 岡本寿夫, 森 肇, 黒木昌一

§1. Introduction

散逸系の周期運動から発生するカオスのひとつに間欠的カオスがあり,¹⁾ 実験的にも流体の熱対流,²⁾ 非線形電気回路³⁾ や化学反応系⁴⁾ などにおいて観測されている。また, その理論的研究も行なわれており, 最近, 一次元写像を援用して間欠的カオスのパワースペクトルを統計的に解析する手法が開発され,⁵⁻¹⁰⁾ 特に, type I の間欠的カオスのパワースペクトルの理論的解析において成功をおさめた。⁶⁻¹⁰⁾

ここでは, Dubois 等²⁾ によるシリコン油の熱対流の実験で対流層内の温度勾配の時系列が示す type III の間欠的カオスの解析に森等の統計理論⁶⁻¹⁰⁾ を適用した結果について報告する。

§2. Dubois-Rubio-Berge の実験

Dubois 等²⁾ はシリコン油 (Prandtl 数 = 38) の熱対流の実験をアスペクト比が $\Gamma_x = 2$, $\Gamma_y = 1$ の長方形セルで行ない, 対流層内の温度勾配 $\nabla_z T$ の時間変化を観測した。Rayleigh 数 R が $377 < R/R_c < 416.7$ (R_c は対流発生の臨界値) のとき $\nabla_z T$ は安定な周期 1 の振動を示すが, $R/R_c \geq 416.7$ のとき図 1 のような間欠的カオスを示した。即ち, ラミナーな部分の振動が周期倍化を起しており, しかも, 振動は不安定である。その振幅の変調は時間と共に増大して, やがて, バーストが起る。これが逆周期倍化分岐である。^{1,2,7)} 図 1 の振動の振幅 $\{x_s\}$ を順次プロットすることにより次の一次元写像を得る。

$$x_{s+1} = f(x_s) = -(1 + \varepsilon)x_s - ax_s^3, \quad (1)$$

これは type III の間欠的カオスに他ならない。^{1,2)} Dubois 等は $R/R_c = 420.4$ の場合に図 1 の高い方の極大値 (○印) のみを順次プロットすることにより, 次の写像を実験的に得た。²⁾

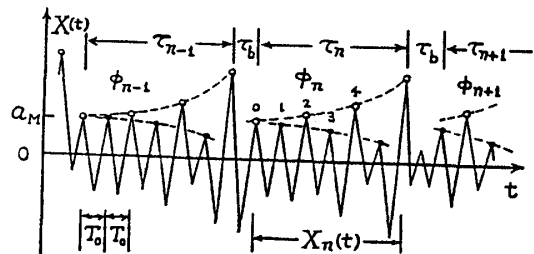


図 1. Dubois et al.²⁾ の実験結果の模式図。
 $R/R_c \geq 416.7$ 。逆周期倍化分岐発生後の熱対流層内の温度勾配 $\nabla_z T$ の時間変化。

$$x_{s+2} = f^2(x_s) = (1 + 2\varepsilon)x_s + 2x_s^3, \quad (a = 1). \quad (2)$$

更に、分岐パラメタの値として $\varepsilon = 0.098$ を得た。

§3. 連続近似と τ_n の分布

(2)は連続近似^{1,2,6-10}を行なうと、 x_s は微分方程式の解として近似的に次のように求まる。

$$x_s^2 / (x_s^2 + \varepsilon) = J(x_0) e^{s/\tau_c}, \quad (3)$$

ただし、 $J(x) \equiv x^2 / (x^2 + \varepsilon)$ 、 $\tau_c \equiv 1/2\varepsilon$ は特性時間であり、 x_0 はラミナーな運動の振幅の初期値である。初期値 x_0 は $0 \leq x_0 \leq x_R$ の範囲に限られるとし、また、 x_s があるしきい値 x_B を越えるとバーストが起るものとする。このとき、 n 番目のラミナー区間の継続時間 τ_n は(3)で $s = \tau_n$ 、 $x_s = x_B$ とおいて得られる。

$$\tau_n = \tau_c \ln \{ J(x_B) / J(x_0) \}. \quad (4)$$

さらに、 τ_n ($n = 1, 2, \dots$) の最小値を τ_R とすれば、(3)を使って $J(x_B) = J(x_R) \exp(\tau_R/\tau_c)$ となる。

初期値 x_0 が区間 $[0, x_R]$ で一様に分布すると仮定すれば、ラミナー状態への再投入確率密度は $P(x_0) = 1/x_R$ となる。このとき、 n 番目のラミナー区間の継続時間が τ_n である確率密度 $W(\tau_n)$ は

$$\begin{aligned} W(\tau_n) &= P(x_0) |dx_0/d\tau_n| \\ &= \frac{W_0}{2\tau_c} \cdot \frac{e^{-(\tau_n - \tau_R)/2\tau_c}}{[1 - J_R e^{-(\tau_n - \tau_R)/\tau_c}]^{3/2}}, \end{aligned} \quad (5)$$

で与えられる。ただし、 $W_0 \equiv \sqrt{1 - J_R}$ 、 $J_R \equiv J(x_R)$ である。また、 $\tau_n > t$ であるような積算確率 $N(t)$ は

$$N(t) = \int_t^\infty d\tau_n W(\tau_n) = \frac{W_0 e^{-(t - \tau_R)/2\tau_c}}{[1 - J_R e^{-(t - \tau_R)/\tau_c}]^{1/2}}, \quad (6)$$

となる。

§4. パワースペクトルの統計理論

森等⁶⁻¹⁰⁾は間欠的カオスのパワースペクトルはラミナー区間の長さ $\{\tau_n\}$ 、区間内での振幅変化 $\{x_s\}$ 及びバーストの前後での位相の飛び $\{\xi_n\}$ の特性関数を使って表わされることを示した。 τ_n の特性関数 $U(\omega)$ は次式で与えられる。

$$U(\omega) \equiv \langle \exp(-i\omega\tau_n) \rangle = \exp[-i\omega\tau(\omega) - r(\omega)] \\ = \int_{\tau_R}^{\infty} d\tau_n W(\tau_n) \exp(-i\omega\tau_n). \quad (7)$$

このとき、パワースペクトル $S(\omega)$ は $\tau(\omega)$ 、 $r(\omega)$ 、および $\{\xi_n\}$ の特性指数 $\xi(\omega)$ 、 $\eta^2(\omega)$ 、振幅変調 $\{x_s\}$ のスペクトル $B(\omega)$ を使って表わされ、しかも、次の3つの項の和で与えられる。

$$S(\omega) = S_P(\omega) + \rho S_{PA}(\omega) + \rho^2 S_A(\omega). \quad (8)$$

ただし、 S_P は位相の飛びによる寄与、 S_A は振幅変調からの寄与、及び S_{PA} はこれら両者のクロスした項である。また、 ρ は振幅変調の強さを表わすスケール因子である。 $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき、 $1 \ll \omega\tau_c \ll 1/W_0^2$ のところで次の漸近形が得られる。

$$\omega\tau(\omega) \simeq r(\omega) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot W_0 \cdot (\omega\tau_c)^{1/2}, \quad (9)$$

$$S(\omega) \simeq \begin{cases} \rho^2 S_A(\omega) \simeq O(\varepsilon) (\hat{\omega}\tau_c)^{-1/2}, & \omega = \frac{\omega_0}{2} + \hat{\omega}, \\ S_P(\omega) \simeq O(1) (\hat{\omega}\tau_c)^{-3/2}, & \omega = \omega_0 + \hat{\omega}. \end{cases} \quad (10)$$

図2は $\varepsilon = 10^{-1}$ 、 10^{-3} 及び 10^{-6} の各場合について(8)で計算したパワースペクトル $\rho^2 S_A(\omega)$ を示したものである。 $\varepsilon = 10^{-1}$ ではほぼ等間隔に並んだピーク列となる。これは振幅変調 $\{x_s\}$ の相関々数が τ_n の平均値 $\bar{\tau}$ の周期をもって振動することに起因するもので、ピーク列の間隔はほぼ $2\pi/\bar{\tau}$ である。 ε を小さくするにつれてピーク列の強度は減少する。 $\varepsilon = 10^{-3}$ の付近でピーク列は消失し、 $\omega \simeq 0$ のピークのみが支配的となる。更に、 ε を小さくすると $S(\omega)$ は $1/\omega^{1/2}$ に漸近し(10)に一致する。図3には $S_P(\omega)$ の振舞が示してあり、 $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき、 $1/\omega^{3/2}$ に漸近する。

一般に、 τ_n の分布の幅 σ が τ_n の平均値 $\bar{\tau}$ に比して $\sigma/\bar{\tau} \gtrsim 1$ のとき、ピーク構造は消失すると予想される。実際に、 $\varepsilon = 10^{-1}$ 、 10^{-3} 及び 10^{-4} のとき、 $\sigma/\bar{\tau} = 0.31$ 、 1.91 及び 3.53 となる。ただし、 $\tau_R = 22.2$ 分とした。また、 $\varepsilon \rightarrow 0$ での漸近形は $\sigma/\bar{\tau} \propto \varepsilon^{-1/4}$ である。

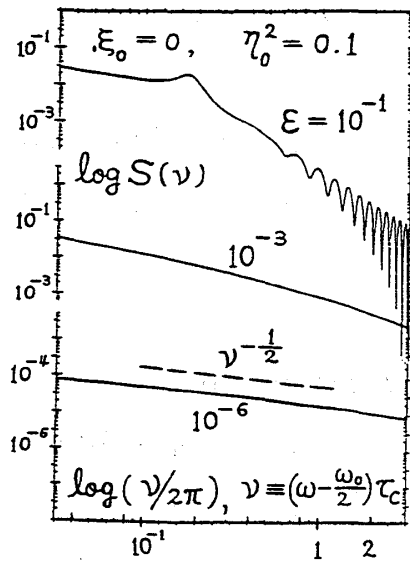


図2 $\omega = \omega_0/2$ 近傍でのパワースペクトル。
 $S(\omega) [\simeq \rho^2 S_A(\omega)]$ vs. $\omega\tau_c/2\pi$ の
 $\log - \log$ プロット。 $\varepsilon = 10^{-1}, 10^{-3},$
 10^{-6} 。

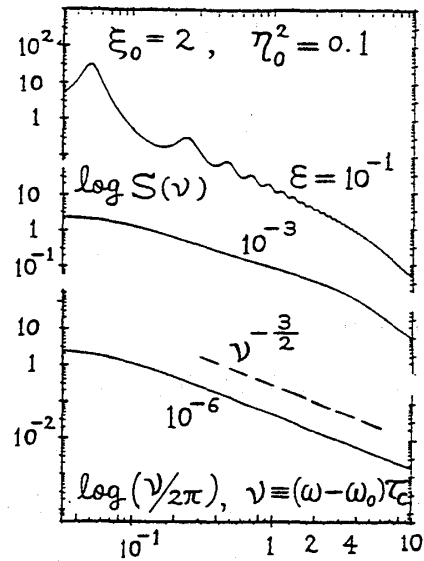


図3 $\omega = \omega_0$ 近傍でのパワースペクトル。
 $S(\omega) [\simeq S_P(\omega)]$ vs. $\omega\tau_c/2\pi$ の
 $\log - \log$ プロット。 $\varepsilon = 10^{-1}, 10^{-3},$
 10^{-6} 。

References

- 1) Y. Pomeau and P. Manneville: Commun. Math. Phys. **74** (1980) 189.
- 2) M. Dubois, M. A. Rubio and P. Bergé: Phys. Rev. Lett. **51** (1983) 1446.
 P. Bergé, Y. Pomeau and C. Vidal: *Order within Chaos* (John Wiley & Sons, New York, 1986) chap. IX.
- 3) C. Jeffries and J. Perez: Phys. Rev. **A26** (1982) 2117.
- 4) Y. Pomeau, J. C. Roux, A. Rossi, S. Bachelart and C. Vidal: J. Phys. Lett. **42** (1981) L271.
- 5) I. Procaccia and H. Schuster: Phys. Rev. **A28** (1983) 1210.
- 6) H. Mori, K. Shobu, B. C. So and H. Okamoto: Physica Scripta **T9** (1985) 27.
- 7) 森 肇: 月刊フィジクス 第6巻 第9号 (1985年, 海洋出版) 488頁。
 吉田 健, 岡本寿夫: 月刊フィジクス 第6巻 第9号 (1985年, 海洋出版) 522頁。
- 8) 森 肇, 岡本寿夫: 「乱流現象の科学」第5章 (巽 友正 編, 東京大学出版会, 1986年) 121 - 163頁。
- 9) B. C. So and H. Mori: Physica **21D** (1986) 126.
 H. Mori, B. C. So and S. Kuroki: Physica **21D** (1986) 355.
- 10) H. Mori, H. Okamoto, B. C. So and S. Kuroki: Prog. Theor. Phys. **76** (1986) 784.