

Coupling Sensitivity of Chaos II

九工大・工 大同 寛明

カオティックな力学系はリヤプノフ指数でみる限り、結合に関して異常に敏感であることは昨年の研究会で、主として数値計算の結果にもとづいて報告した。つまり、リヤプノフ・スペクトルが $L_1 \gg L_2 \gg \dots$ (カオティックであるから少なくとも $L_1 > 0$) であるような力学系を結合し、その結合強度を d とすると、結合系のリヤプノフ・スペクトル $L_1' \gg L_2' \gg \dots$ は、 $d \rightarrow 0$ で次のようにふるまうのである。¹⁾

$$\begin{aligned} L_{2i-1}'(d) - L_i &\cong A / \ln(1/d) \\ L_{2i}'(d) - L_i &\cong -A / \ln(1/d) \end{aligned} \quad (1)$$

($i = 1, 2, \dots$) ここで A は d にも i にも依らぬ定数である。(この結果は2次元以下の写像系を結合した場合についてのみ確認されており、3次元以上の写像系を結合した場合については、conjecture である。) 結合というのは一種の擾動であるから、カオスのこの種の擾動に対するこの異常な応答ぶりは、平衡系の素直な線形応答などと比べると、大変に著しい。今回の講演では、最も簡単な一次元写像系を結合した場合について、結合感性(coupling sensitivity)の理論的説明を行った。

最も重要な結果は、(1)の係数 A が局所リヤプノフ指数のゆらぎによって生じる拡散係数 D_f を factor として含む(ゆるい意味で比例する)ということである。ここで D_f は、結合する一次元写像系 $X' = F(X)$ が周期1のカオスを示す場合、

$$D_f = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \langle \left\{ \sum_{j=1}^N (\ln |F'(X_j)| - L) \right\}^2 \rangle$$

で定義される。²⁾ ($\langle \dots \rangle$ は平均、又、 $L = \langle \ln |F'(X)| \rangle$ である。) これまで、ある特殊な場合には結合感性があらわれないことが数値計算でわかっていたが、¹⁾ そのような場合は全て $D_f = 0$ なので、理論と consistent である。 $D_f = 0$ となるカオスは極めて特殊なもの(対称テント写像やロジスティック系で $r = 4$ の場合など)であるから、少なくとも物理的には、結合感性はカオスの普遍的性質であるように思われる。(高次元系でも多分。) これがリヤプノフ指数以外の量にどのように効いてくるかが、1つの課題である。上の理論の詳細は文献3を見て下さい。

文 献

- 1) Prog. Theor. Phys. **72** (1984) 853; **73** (1985) 310.
Prog. Theor. Phys. Suppl. **79** (1984) 75.
Phys. Lett. **110A** (1985) 5.
Lecture Notes in Mathematics **1186** (1986) 361.
- 2) P. Grassberger and I. Procaccia: *Physica* **13D** (1984) 34.
H. Fujisaka: Prog. Theor. Phys. **70** (1983) 1264.
- 3) Phys. Lett. A, to appear.