Title	Characterization of Strange Attractor
Author(s)	秦, 浩起; 堀田, 武彦; 冨田, 浩治; 小林, 達治; 森田, 照光; 森, 肇
Citation	物性研究 (1987), 48(4): 370-372
Issue Date	1987-07-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/92609
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

Characterization of Strange Attractor

九大・理　秦　浩起，堀田武彦，冨田浩治
小林達治，森田照光，森　　肇

散逸力学系のカオスは軌道不安定性を持ち，その意味で決定論的記述は意味を失い，統計論的記述が必要となる。一方その軌道は構造的に安定な極限集合を形成し，奇妙なアトラクターと呼ばれる。そのフラクタル構造を知ることはカオスの記述において重要な意味を持つと考えられる。

奇妙なアトラクターのフラクタル構造は，一般にアトラクター全体で一様ではない。これを捉えようとするものが，昨年シカゴ大のグループによって導入された「特異点のスペクトル $f(\alpha)$」である。[1)] それは位相空間を大きさ l の箱に分割した時，軌道の滞在確率 $P_i(l)$ の l に対する特異性 α_i〔$P_i(l) \sim l^{\alpha_i}$〕と同じ α という特異性を持つ点の集合のフラクタル次元 $f(\alpha)$ で全体を記述しようとするものである。

ここでは，この $f(\alpha)$ をカオス状態に適用することを考える。カオス状態の流れは，アトラクターの接ベクトル，及びそこでの線形化行列が大切だと思われる。そこで力学系として2次元写像（Poincaré 写像のモデルとなる）を考え，アトラクターの各点で接方向(1)とそれに垂直な方向(2)を決める。

さて，時系列 $\{x(n)\}$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$ に対して各点での i 方向（$i=1, 2$）の拡大指数 $\lambda_i(n)$ が次のように書き表わされる。

$$\lambda_i(n) \equiv \log\{|T(n)\,\boldsymbol{e}_i(n)|\} \tag{1}$$

但し，$T(n)$ は点 $\boldsymbol{x}(n)$ での線形化行列で $\boldsymbol{e}_i(n)$ は i 方向単位ベクトルである。

次に点 $\boldsymbol{x}(n)$ のまわりで i 方向に l_i の大きさを持つ箱を考え，その確率測度を $P_n(l_1, l_2)$ と定義する。この時，$\boldsymbol{x}(n)$ から $\boldsymbol{x}(n+1)$ の間に

$$P_{n+1}(l_1, l_2) = P_n(l_1 e^{-\lambda_1},\ l_2 e^{-\lambda_2}) \tag{2}$$

の関係があることに注意し，演算子

$$\hat{M}(n) \equiv \exp\left\{-\sum_i \lambda_i(n)\, l_i \frac{\partial}{\partial l_i}\right\} \tag{3}$$

を導入すると，〔$P_n(l_1, l_2)$〕$^{q-1}$ の時間発展は，

$$[P_{n+1}(l_1, l_2)]^{q-1} = \hat{M}(n)\,[P_n(l_1, l_2)]^{q-1} \tag{4}$$

と書くことができる。

ここで $f(\alpha)$ スペクトルを与える $\tau(q)=\alpha q-f(\alpha)$ を i 方向に分解し，$\tau(q)=\tau_1(q)+\tau_2(q)$ と書くと，

$$<[P_n(l_1, l_2)]^{q-1}> \sim l_1{}^{\tau_1(q)}\, l_2{}^{\tau_2(q)} \tag{5}$$

より $f(\alpha)$ が決定できるので，平均化演算子 P，及び $Q=1-P$ を用いると，(3)式より

$$\begin{aligned} &<[P_{n+1}(l_1, l_2)]^{q-1}> \\ &= \sum_{s=0}^{n} <\hat{M}(n)Q\cdots Q\hat{M}(n-s)><[P_{n-s}(l_1, l_2)]^{q-1}> \\ &\quad + <\hat{M}(n)Q\cdots Q\hat{M}(0)Q\,[P_0(l_1, l_2)]^{q-1}> \end{aligned} \tag{6}$$

となり，第2項は初期値との相関で $n \gg 1$ の時，無視できる。そこで(5)式を使うと，

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{s=0}^{n} <M(S)Q\cdots QM(0)> = 1 \qquad n \gg 1 \\ &M(s) \equiv \exp\{-\sum_i \lambda_i(s)\,\tau_i(q)\} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

が，$\tau_i(q)$ を決定する式であることがわかる。Hénon 写像など多くの写像で $\tau_1(q)=q-1$ が期待され(7)式を解くことが可能となる。

このように局所的拡大指数 $\lambda_i(n)$ と $f(\alpha)$ スペクトルとの関係が明らかになった。

一方，$\lambda_1(n)$ と関係の深い量として $h(\gamma)$ スペクトル[2)]がある。これは次のように定義される。

$$\Lambda_i(n) \equiv \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\lambda_i(j) \tag{8}$$

$$\Psi(q) \equiv -\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log <e^{-n\Lambda_1(n)(q-1)}> \tag{9}$$

$$\Psi(q) \equiv \gamma q - h(\gamma) \tag{10}$$

これに対しても(7)式と類似の表式で

$$M'(s) \equiv \exp\{\Psi(q)-\lambda_1(s)(q-1)\} \tag{11}$$

に対し,

$$\sum_{s=0}^{n} < M'(n)\, QM'(n-1)\, Q \cdots\, QM'(n-s) > = 1 \qquad (11)'$$

が $h(\gamma)$ スペクトルを決定する式となる。

これら2つの量，$\tau(q)$ と $\Psi(q)$ の間には系の Jacobian $|J| =$ const. の時，次のような簡単な関係式

$$\Psi(q-\tau_2(q)) = -\tau_2(q)\cdot\log|J| \qquad (12)$$

が成立することが(7), (9)式よりわかる。つまり，アトラクターのフラクタル構造を表現する量と，力学系のエントロピーとかかわる量の間のつながりが見い出されたことになる。

このように $\lambda_i(n)$ に着目することで $f(\alpha)$, $h(\gamma)$ スペクトルをうまく表現することができた。実際，これを実行することは容易で図1のような $f(\alpha)$ スペクトルが得られる。

また，$\lambda_i(n)$ の時間相関が速く落ちていくと(11)′式に対して，近似計算が可能になる。その時，1次元写像から出発して近似的に $f(\alpha)$, $h(\gamma)$ を決定する道が開けてくると考えられる。

さらに，Hénon 写像にみられるバンド分離の過程では，2^m バンドと $2^{m'}$ バンドの間で，$\Psi(q)$ に次の関係

$$\Psi^{(m)}(q) \simeq \Psi^{(m')}(2^{m'-m}(q-1)+1) \qquad (13)$$

が成立することがわかり，$h(\gamma)$ は元より(12)式より $f(\alpha)$ の関係をも与えることになる。

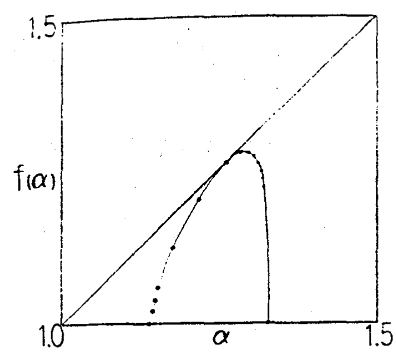

図 1

以上，奇妙なアトラクターの $f(\alpha)$ スペクトルについて幾つかのことがわかった。他の写像，特に散逸標準写像においても $f(\alpha)$, $h(\gamma)$ の計算を行っている。ロッキングからカオスへ至る際，もとのロックされた周期が重要な働きをする可能性がある。これからは，このf (α) の物理的意味について考えていく必要があるように思われる。

1) Halsey et al.: Phys. Rev. **A33** (1986) 1141.
2) Eckmann et al.: Phys. Rev. **A34** (1986) 659.
Sano et al.: Prog. Theor. Phys. **76** (1986) 945.