です。fは分布固数で，力学変数をp，qで代表させています。熱力学系はカオスですから，カオスの立場では$f(p, q, t)$はtについても，p，qについても極めてはげしく乱雑に変化する量です。$t\to\infty$のとき$\lim f(p, q, t)$は存在しないのがふつうです。しかし一般に$B(p, q)$はp，qのなめらかな関数ですから，(3)の積分ではfのp，qに対するはげしい変化は消されて$\overline{B}(t)$は存在するでしょう。このとき(3)のfの代わりに滑らかな関数$g(p, q, t, a)$で置き換えることが出来ます。この具体的な例はパイこね変換で示すことが出来ます。こういうgが存在するとき$f(p, q, t)$は$g(p, q, t)$に法則収束するといいます。fはパラメーターaのやはりはげしく変化する関数ですが，gはaのなめらかな関数であると期待出来ます。いいかえるとfはaで展開出来ないが，gでは展開出来るでしょう。fは例えばLiouvilleの方程式に従いますが，gの従う方程式はそれとは全く異り，例えばFokker-Planck型のものでありましょう。線形応答理論ではfをaで展開出来ると仮定しているが，それには疑問があると私は思いました。このことをいつか森さんに話しましたら，van Kampenもそういうことを考えていると教えて下さいました(N. G. van Kampen, Physica Norvegica **5** (1971) 279).

fはaで展開出来ないといういくつかの状況証拠はありますが，まだ決定的なことはいえません。しかしはじめにのべたように，線形応答理論ではχ_sの代りにχ_{iso}が出て来るのは，このためではないかと考えています。御教示をえられれば幸です。

量子力学と確率過程

並　木　美喜雄

「カオス」の研究会で私が話したい，または話すことのできるテーマは

- 量子力学と確率過程
- 波動関数と観測過程

です。二つとも話して議論していただきたいのですが，時間的制約もあることだし，さんざん迷った末，前者をえらびました。私としては，「量子力学と確率過程」という話題を「カオス」とくに「量子カオス」の立場で見直したいという将来目標があります。ただ，「カオス」についてそれほど勉強したわけではないので，この研究会の興味に合致できるかどうかわかりません。この点御容赦願います。なお，後者の話題もこの研究会との関連で，捨てがたい未練がありますが，すでに何回か話したり書いたりしたので，それら[1]を見て下さるよう，お願いします。

さて，周知のように，量子力学では基本原理のところに確率を導入しますが，量子力学成立直後からこれについては不満がありました。Einsteinばかりでなく，de BroglieやSchrödingerなどもCopenhagen解釈に従うことを潔よしとせず，何とか量子力学を書直そうとしましした。この方向の努力は大部分が量子力学を古典的な確率過程として定式化し直そうとするものです。

そのナイーブな発想はSchrödinger方程式と拡散方程式の類似性

$$\frac{\partial \phi}{\partial (\mathrm{i}t)} = \frac{\hbar}{2m}\nabla^2\phi, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = D\nabla^2\phi \tag{1}$$

からはじまります。形式的な対応は

$$t \leftrightarrow -\mathrm{i}t, \quad \frac{\hbar}{2m} \leftrightarrow D \tag{2}$$

です。不確定性関係さえも置き換え(2)で相互変換します：$\Delta x\,\Delta p \simeq \hbar \leftrightarrow \Delta x\,\Delta v \simeq 2D$.この類似性は，量子揺動が背景物質〝エーテル〟の古典的揺動から生れるのではないかという発想を生み，かなり早い時期からいろいろな試みが行われました。[2)]〝隠れた変数〟理論の芽生えです。しかし，この方向の努力に冷水をかけたのがv. NeumannのNO-GO定理でした。戦後，Bohmはこの定理を突破して，ひとつの〝隠れた変数〟理論をつくりました。

Bohmの理論は，$\phi = |\phi| \exp(\mathrm{i}S/\hbar)$とおいてSchrödinger方程式をNewton型方程式

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = -\nabla(V + V_{\mathrm{Q}}) \tag{3}$$

に書き換え(ただし，$\boldsymbol{p} = \nabla S$, $V_{\mathrm{Q}} = -(\hbar^2/2m)|\phi|^{-1}\nabla^2|\phi|$)，これを基礎にして量子力学を古典力学の中に解消しようとする意図をもったものでした。古典的Newton方程式との唯一つの相違は量子力学的ポテンシャルV_{Q}の存在ですが，これを〝エーテル〟による古典的揺動力と考えるわけです。この理論はBohm自身やVigier(Stochastic interpretation)，Takabayashi(hydrodynamical quantization)などによって発展させられました。[3)] しかし，私の印象では，量子力学的力は古典的揺動力と見るにはあまりにも異質的ですし，理論自身も多体系や場には不向きのように思えます。

さて，Bohmは量子力学を消去したいと思ったのですが，そんな意図は抑えて，彼の道筋を逆に辿れば(すなわち，古典的Newton方程式にV_{Q}を加えて波動関数を構成し，Schrödinger方程式に到れば)，これは一種の量子化法とみなせます。実際，Nelsonは量子力学を古典的な確率過程として定式化することに成功しました。[4)] 彼の確率過程量子化は，量子揺動が古典的〝エーテル〟の揺動として理解できるかという問題に対するひとつの見事な解答であり，

原理的立場から見れば大そう興味深い。しかし，Bohm系統の理論に対すると同様に，この理論に説明学以上のもの期待できるだろうか，という疑問を私は感じます。つまり，従来の量子化法ではむずかしかった，または不可能であった問題を解決できるかということです。折角の見事な理論も量子力学の適用範囲を従来より狭くする方向でしか有効でないとなれば，あまり面白くありません。

この点，Parisi-Wu[5]によって導入された新しい確率過程量子化法（SQM）は，従来の量子化法（正準量子化，径路積分量子化）にない利点をもち，量子力学の適用領域を拡大し，その原理的発展をうながす可能性を秘めています。具体的内容は後で説明しますが，通常の時間の他に新しい時間変数（仮想時間とよばれることがある）とそれについての確率過程を導入し，その熱平衡極限として量子力学を与えようとするものです。仮想時間についての確率過程を使うところが，Bohm-Nelsonの理論と違いますが，量子揺動を古典的確率過程に帰着させようという基本的発想は同じでしょう。SQMの背景には，d次元量子系は揺動をもつ$d+1$次元古典系に等価であるという事実があります。これはすでにスピン系の計算で利用されてきたものでした。[6]

SQMの発想をもっと徹底化したものとして，ミクロカノニカル量子化があります。[7] それは，d次元量子系を$d+1$次元の（決定論的な）古典系でおきかえようとするものです。すなわち，新しい仮想時間について，作用関数をポテンシャルとする古典的運動を設定し，その古典カオス的行動を量子揺動であるとする量子化法です。すでに場の量子化に使われていますが，私はこの量子化法に原理的な疑問をもっています。それは，線形系ではカオスが実現しないこと考慮すれば，自由場の量子論が成立しないからです。この量子化法には原理面からの補強が必要でしょう。なお，SQMとの混用も工夫されています。

SQMとミクロカノニカル量子化では，通常の時間変数は先ほどのナイーブな発想と同様に虚数時間に解析接続しておく必要があります。Bohm-Nelson理論では，実数時間のままでしたから，この点はっきりした相違があるわけです。SQMにとって虚数時間の使用は本質的なものであるか？実は，実数時間のままでSQMをつくることは可能です ――ミンコウスキーSQM。[8]

量子力学を確率過程論として見直すという視点では，相空間分布関数を忘れることはできません。Wigner関数がよく知られていますが，これは正定値ではなく，確率分布関数とはいえません。しかし，Wigner関数を相空間の小領域について平均したHusimi関数は正定値であり，カオスの研究にも利用されていることは御承知の通りです。量子力学のコヒーレント表示とかgeometrical quantizationなどもこの方向の理論といえるでしょう。ただ，Nelsonの

確率過程量子化やSQMでは，素性のわかっているWiener-Markoff型の確率過程を設定しているのに対して，Wigner関数やHusimi関数の背景に存在する確率過程がどんなものか，よくわかっていません。なお，相空間でSQMを定式化する試みもあります。[9]

以上の諸理論を表にしておきました（表1）。

表1．量子力学の確率過程論的定式化

A．配位または運動量空間での量子力学

<table>
<tr><th>時空</th><th>虚数時間</th><th>実数時間</th><th>揺動源</th></tr>
<tr><td rowspan="2">4
次
元</td><td>ナイーブ発想
Sch. eq ⟷ diff. eq</td><td></td><td rowspan="2">古典的
エーテル</td></tr>
<tr><td></td><td>〝隠れた変数〟
（Bohm，…）
Nelsonの量子化</td></tr>
<tr><td rowspan="2">5
次
元</td><td>SQM</td><td>ミンコウスキーSQM</td><td rowspan="2">古典的
エキゾチック
時空</td></tr>
<tr><td>ミクロ・カノニカル
量子化</td><td></td></tr>
</table>

B．相空間量子力学

4 次 元		Wigner関数 Husimi関数 ……………	?
5 次 元	相空間SQM		古典的 エキゾチック 時空

最後に，SQMの概要を紹介しましょう。力学変数 $q(X)=\{q_i(x)\}$，作用積分 $S[q]$ をもつ力学系を考えます。ただし，Xは粒子系に対しては（虚数）時間変数，場に対しては4次元ユークリッド時空座標です。径路量子化法によれば，力学量 $F(q)$ の期待値は

$$<F>=N\int F(q)\ \exp\left(-S[q]/\hbar\right)\delta q \qquad (4)$$

によって与えられます（Nは規格化定数）。SQMは径路積分によらずに直接 $<F>$ を計算する量子化法です。まず，q にXの他に仮想時間 t の依存性を与え，t についての確率過程をLangevin方程式

$$\gamma \frac{\partial q_i}{\partial t} = -\frac{1}{\gamma}\frac{\delta S}{\delta q_i} + \eta_i(x,\ t) \tag{5}$$

の設定によって導入します。ただし，η_i は

$$\begin{aligned} &< \eta_i(X,\ t) > = 0, \\ &< \eta_i(X,\ t)\,\eta_j(X',\ t') > = 2\alpha\delta_{ij}\delta(X - X')\,\delta(t - t') \end{aligned} \tag{6}$$

に従うガウス型白色雑音です。α は拡散定数であり，後述のように量子力学を生むためには，プランク定数 $\hbar$ に等しくおく必要があります。γ は t のスケールを調節するパラメータですが，熱平衡分布には現れません。

Langevin 方程式(5)を解けば，q は η の関数になるので，F の期待値は η についての平均値 $< F >_t = < F(q(t\,;\eta)) >_\eta$ として求まります。一方，これを

$$< F >_t = \int F(q)\,P(q,\ t)\,\delta q \tag{7}$$

によって再現する確率分布 $P(q,\ t)$ は Fokker-Planck の方程式を満足するが，$P(q,\ t) \xrightarrow[t\to\infty]{} N\exp(-S/\alpha)$ となることは明らかです。したがって，$\alpha = \hbar$ とおけば，(7)は $t \to \infty$ で(4)に一致します。すなわち，Langevin 方程式を解いて $q(t\,;\eta)$ を求めて $\lim_{t\to\infty} < F(q(t\,;\eta)) >_\eta$ をつくれば，(4)に等しい $< F >$ を与えるはずです。これがSQMの処方です。

中性自由スカラー場 $\phi(X)$ を量子化してみましょう。Langevin 方程式は

$$\gamma \frac{\partial}{\partial t}\phi(X,\ t) = -\frac{1}{\gamma}(\Box + m^2)\,\phi(X,t) + \eta(X,t) \tag{8}$$

なので，直ちに解けて

$$\begin{aligned} D(X,\ \tau) &\equiv \lim_{t\to\infty} < \phi(x,t)\,\phi(x+X,\ t+\tau) >_\eta \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\, \frac{1}{k^2+m^2}\, e^{ikX - (k^2+m^2)|\tau|\gamma^{-2}} \end{aligned} \tag{9}$$

となります。$D(X,\ 0) = \Delta(X)$ が自由場のプロパゲータを与えることは明らかでしょう。なお，粒子質量は次の漸近形からえられます：

$$D(X,\ 0) \xrightarrow[|x|\to\infty]{} \frac{m^2}{16\pi^3}\left(\frac{2\pi}{m|X|}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-m|X|} \tag{10a}$$

$$D(0,\tau) \xrightarrow[|\tau|\to\infty]{} \frac{m^2}{16\pi^2}\left(\frac{\gamma^2}{m^2|\tau|}\right)^2 e^{-m^2|\tau|\gamma^{-2}} \tag{10b}$$

ＳＱＭには，ラグランジュアンやハミルトニヤンにゲージ固定項やFaddeev-Popovお化け場を入れることなくゲージ場の量子化ができるなどの理論的利点があります。これはＳＱＭが運動方程式を出発点とする量子化法であり，原理的にはラグランジュアンやハミルトニヤンを必要としないという特質に関係します。この特質から従来の方法では不可能だった非ホロノーム系の量子化を行う可能性も生まれるでしょう。また，格子ゲージ理論の数値シミュレーションにも利用され，径路積分量子化にもとづく数値計算以上の威力を発揮しています。実際，世界最大の数値計算は現在ＳＱＭで行われております。ＳＱＭはたしかに量子力学の適用領域を拡大したり，有利に非摂動数値計算を進める基盤を提供してくれました。

しかし，量子力学を古典的確率過程として見直そうとする立場からすれば，それらの実用的利点だけでは不満です。何よりも，新しく導入した仮想時間の物理的意味がわかっていないという不満があります。今までのところ，単なる数学的な補助変数であり，〝時間〞と称する理由は皆無です。そこで，仮想時間に意味を与える方策を模索しましょう。最近の〝particle-cosmology〞には，宇宙ははじめ大きな次元の時空世界をもっていたが，漸次つぶれてきて，今の４次元世界に落付いたという考えがあります。これを援用して，次のような状況を想像します。すなわち，現在の４次元世界以外のエキゾチックな時空は完全にはつぶれておらず，平均としてはゼロだが，揺動しながら存在していると考えるのです。現在の４次元世界に直交する方向の時空変数が仮想時間だというわけです。エキゾチック時空における古典的揺動が量子力学を与えるという発想です。ここまでくれば，あるいは多次元古典力学の中に量子力学を解消してしまえるかもしれません。曲ったエキゾチック時空による非線形効果が古典的カオスを現出させ，ミクロカノニカル量子化的な効果で量子力学を生み出すという目論見はいかがでしょうか。近い内モデルをお見せできると思います。

文　献

1) S. Machida and M. Namiki: Prog. Theor. Phys. **63** (1980) 1457, 1833; Proc. of the ISQM (1984，日本物理学会）127，136；並木美喜雄：「マクロ系の量子力学と観測問題」，大槻義彦編〝物理学最前線〞10 (1985，共立出版)；研究会報告「進化の力学への場の理論的アプローチ」素粒子論研究74巻6号 (1987) Ｆ1　および物性論研究47巻5号 (1987) 407.

2) E. Schrödinger: Sitzungsb. Preuss. Akad. W. (1931) 144; Am. de l'Inst. Henri-Poincaré **11** (1932) 300; J. Metadier: Comptes Rendus **193** (1931) 1173; R. Fürth: Zeits. f. Phys. **81** (1933) 143.

3) 例えば J. P. Vigier and S. Roy: Hadronic J. Suppl. **1** (1985) 475; T. Takabayashi: Proc. of the ISQM（上掲）.

4) E. Nelson: Phys. Rev. **150** (1966) 107.

5) G. Parisi and Yong-Shi Wu: Sci. Sin. **24** (1981) 483.

6) 例えば, M. Suzuki: Prog. Theor. Phys. **56** (1976) 1454; Commun. Math. Phys. **51** (1976) 183.

7) 例えば, D. J. E. Collaway and A. Rahman: Phys. Rev. Lett. **49** (1982) 613.

8) H. Nakazato and Y. Yamanaka: Phys. Rev. **D34** (1986) 492; H. Nakazato: Prog. Theor. Phys. 印刷中。

9) S. Chaturvedi, A. K. Kapoor and V. Srinivasan: Phys. Lett. **B157** (1985) 400; I. Ohba: Prog. Theor. Phys. 投稿中。

なお，今回のテーマについては次の報告も見ていただけると幸です。

M. Namiki: Proc. of the ISQM-Tokyo '87 （1987年4月刊行予定，日本物理学会）。

自己相似性の統計熱力学形式 I

慶大・理　井上政義　藤坂博一

カオスの物理は次の様に分類されるだろう。Ⓐシナリオ（発生），Ⓑ定常カオス，Ⓒ非定常カオス（過渡）。Aについては普遍的法則が発見され，かなり解明が進んでいる。またこれは統計物理学の〝相転移現象〟に対応している。Cは非平衡系の統計物理学に対応しており，シンプルな一般論は難しいと思われる。Bは熱平衡系の統計物理に対応しておりそれを解明する一般的理論形式をここでは論ずる事にする。

熱平衡系と定常カオスのパラレリズム（Parallelism）は，その基本的立脚点が共通している事によって成立している。それは(1)問題とすべき性質（物理量）として〝長時間にわたる大域的性質〟を取扱う。(2)大域的物理量として〝指数的特性量の極限値〟を採用する。例としては$W \sim e^{S/k}$；$N \to \infty$ の場合，エントロピーSが指数的特性量である。

まず熱平衡系統計力学の理論形式を復習する。粒子数N，体積Vの系のエネルギーを$E(N, V)$とすると，この系の分配関数Zは

$$Z(N, \beta, V) = \int_0^\infty dE\,\Omega(N, E, V)\,e^{-\beta E(N,V)} \tag{1}$$