

岐でサドルのマニフォールドと接して、リミットサイクルが消滅する。ホモクリニック分岐ライン (saddle-loop 分岐ともいう) が saddle-node 分岐ラインと交わる点は saddle-loop-node 分岐点 (sln) と呼ばれる。この分岐点より相図の右側にある saddle-node 分岐ではリミットサイクルの周上で saddle と node が対生成する。その時生じる node はわずかなずれに対しては安定だが、ある程度ずれが大きいともとのリミットサイクルにそって一周してから node に近づく。この意味で saddle-loop-node 分岐点の右側の saddle-node 分岐の近くでは系は興奮状態にあるといえる。図 2 に図 1 の中に描いた線にそってパラメーターを動かした時のふるまいの概略を示す。単安定、双安定、振動状態、興奮状態の遷移のようすがわかる。

エントロピーとコンプレキシティ

大阪市大・理 釜 江 哲 朗

無秩序さを表す量としてのエントロピーは、確率分布に対する量であるため、観測された現象に対して適用するには、確率空間の設定が必要となる。この意味で、エントロピーは現象の無秩序さを直接表現しうる量とはいえない。コンプレキシティ (complexity) は、対象のもつ論理的な複雑さを表現する量として、1960年代に A. N. Kolmogorov と G. J. Chaitin によって導入された。それは、現象の無秩序さのより直接的な表現となっている。

考察の対象とするものの全体を W とする。 W は以下の N 及び D を含むものとする。 W の各元は、一定の手続きで番号付け可能なものとする。この番号付けによって、 W は $N = \{0, 1, 2, \dots\}$ と一対一に対応する。この対応によって、 N 上の計算可能性に関する概念が W 上に移される。長さ有限な 0 と 1 の列の全体を D とする。 D の元 ξ の長さを $L(\xi)$ と書く。 $W \times D$ から W への部分的に計算可能な関数 f を考える。ここで、関数 $f(x, \xi)$ が部分的に計算可能であるとは、入力 $(x, \xi) \in W \times D$ に対して出力 $f(x, \xi) \in W$ を計算する手続きが存在することをいう。この手続きの概念は数学的に明確にされねばならないが、ここでは、計算機のプログラムを思い浮べることにしよう。入力 (x, ξ) に対して、計算が完了しない場合もある。このようなとき、 $f(x, \xi)$ は定義されていないものとする。「部分的に」というのは、関数 f の定義域が $W \times D$ の全体とは限らないことを意味する。

W の元 x, y に対して、 x を与えた上での y の f -コンプレキシティを

$$K_f(y|x) = \inf_{f(x, \xi) = y} L(\xi)$$

と定義する。ただし、 $f(x, \xi) = y$ となる ξ が存在しないときには $K_f(y|x) = \infty$ と考える。また、空なる語 A を与えた上での f -コンプレキシティ $K_f(y|A)$ を、 y の f -コンプレキシティと呼び $K_f(y)$ と書く。

$W \times D$ から W への部分的に計算可能な関数をアルゴリズムと呼ぼう。アルゴリズム A が万能であるとは、どんなアルゴリズム f に対しても、 f にのみ依存する定数 C が存在して

$$K_A(y|x) \leq K_f(y|x) + C$$

がすべての W の元 x と y に対して成立することをいう。万能なアルゴリズムの存在を示そう。

アルゴリズムの計算手続き(プログラム)は0と1を用いて書かれているものと仮定してよい。すなわち、各アルゴリズム f に対して、 f を計算するためのプログラムとなる D の元が存在する。 $D \times D$ から D への計算可能で一对一の関数 φ を

$$\begin{aligned} \varphi(\eta_1 \eta_2 \cdots \eta_m, \xi_1 \xi_2 \cdots \xi_n) \\ = \eta_1 0 \eta_2 0 \cdots \eta_m 0 11 \xi_1 \xi_2 \cdots \xi_n \end{aligned}$$

と定義する。 φ の値域を I とし、 I から D への関数 φ_1 と φ_2 を

$$\varphi_1(\varphi(\eta, \xi)) = \eta, \quad \varphi_2(\varphi(\eta, \xi)) = \xi$$

と定義する。アルゴリズム A を次のように定義する。入力 $(x, \zeta) \in W \times D$ に対して、 $\zeta \in I$ のとき、計算手続き $\varphi_1(\zeta)$ に従って $(x, \varphi_2(\zeta))$ を入力として処理する。ただし、 $\zeta \notin I$ または $\varphi_1(\zeta)$ が計算手続きを意味しないときには、 A は定義されないものとする。この A が万能なアルゴリズムであることを示す。勝手なアルゴリズム f に対して、 f を計算するプログラム $\eta \in D$ が存在する。このとき、 $K_f(y|x) < \infty$ をみたす W の勝手な元 x と y を考える。 $f(x, \xi) = y$ 且つ $L(\xi) = K_f(y|x)$ をみたす ξ が存在し、さらに

$$A(\varphi(\eta, \xi), x) = f(\xi, x) = y$$

となるから

$$\begin{aligned} K_A(y|x) &\leq L(\varphi(\eta, \xi)) = 2L(\eta) + 2 + L(\xi) \\ &= K_f(y|x) + 2L(\eta) + 2 \end{aligned}$$

が成立する。ここで、 $2L(\eta) + 2$ は f のみ依存する定数であり、また、 $K_f(y|x) = \infty$ のときには上式は明らかに成立しているから、 A は万能なアルゴリズムとなる。

万能なアルゴリズム A は、すべての W の元 x と y に対して $K_A(y|x) < \infty$ をみたす。また、2つの万能なアルゴリズムは定数差を無視すれば同一視できる。以後、万能なアルゴリズム A を一つとり、 K_A を単に K と記し、コンプレキシティと呼ぶ。 A の選び方にのみ依存して定まる有界区間内に値をとる変量を、一般に $O(1)$ と記す。

I. 勝手な $x \in W$ と $n \in \mathbf{N}$ に対して

$$\log_2^+ \#\{y ; K(y|x) \leq n\} = n + O(1)$$

II. $K(z|x) \leq K(y|x) + K(z|y) + 2\log_2^+ K(z|y) + O(1)$

III. a が W から W への計算可能な関数であるとき、 $K(a(x)|x) = O(1)$ となる。

IV. $x \in W$ を任意に固定するとき、 $K(y|x)$ は y の関数として計算可能ではない。

このように、コンプレキシティは計算可能な量ではない。現実への応用を考えるときは、これを近似するような計算可能な量で代用しなければならない。このようなものとしては、アルゴリズム A を計算時間 t で打切ったアルゴリズム（もはや万能ではない） A_t が考えられる。

W の元 x と y に対して

$$K_t(y|x) = K_{A_t}(y|x) \wedge t$$

と定義する。

V. $K_t(y|x)$ は $t \in \mathbf{N}$ 及び $(x, y) \in W \times W$ の関数として計算可能で、

$$K(y|x) = \lim_{t \rightarrow \infty} K_t(y|x)$$

が成立する。

次に、コンプレキシティとエントロピーの関係を述べる。

VI. X_1, X_2, \dots は有限集合上に値をとる定常な確率変数列でエルゴド的であるとする。このとき、確率1で

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} K(X_1 X_2 \cdots X_n | n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} K(X_1 X_2 \cdots X_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(X_1 X_2 \cdots X_n) \end{aligned}$$

が成立する。ただし、 $H(X_1 X_2 \cdots X_n)$ は確率変数の組 $(X_1 X_2 \cdots X_n)$ の同時分布に対する 2 を底とするエントロピーを表す。

上式において、コンプレキシティは個々の実現値に対して定義されるが、エントロピーは確率変数列の分布の関数である。すなわち、前者が個別の対象に関する量であるのに対して、後者はそれらを実現する確率機構に関する量であって、個別の対象に直接かかわることはできない。しかしながら、有限集合 S 上の無限列 $x = x_1 x_2 x_3 \cdots$ のもたらす頻度の意味での分布を考察することができる。すなわち、 S 上のすべての有限列 $\xi = \xi_1 \xi_2 \cdots \xi_k$ に対して、 ξ の x における相対出現頻度の極限

$$r(x, \xi) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \# \{ i \leq n, x_{i+j} = \xi_j (j = 1, 2, \dots, k) \}$$

が存在すると仮定する。このとき、 ξ に対する分布 $r(x, \xi)$ に関する一文字あたりのエントロピー $h(x)$ を

$$h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\xi; \text{長さ } n} -r(x, \xi) \log_2 r(x, \xi)$$

と定義することが出来る。このとき、以下の関係が成立する。

$$\begin{aligned} \text{VII. } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} K(x_1 x_2 \cdots x_n | n) \\ = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} K(x_1 x_2 \cdots x_n) \leq h(x) \end{aligned}$$

$h(x)$ は無限列 x から、それを生成するであろう定常確率変数列を推定し、この確率変数列の一文字当りのエントロピーを求めたものといえる。このように、非確率的な対象を確率的にとらえる手法は、dynamical embedding と呼ばれ、エルゴード理論において有効に働くことがある。上式は、出現頻度のみの関数である $h(x)$ よりコンプレキシティは小さく、詳細な情報

研究会報告

を提供することを意味している。

文献

G. J. Chaitin: Algorithmic information theory. IBM J. Res. Develop. 21 (1977) 350–359.

A. N. Kolmogorov: Logical basis for information theory and probability theory, IEEE Trans. Inform. Theory IT-14 (1968) 662–664.

釜江哲朗：確率と論理にもとづくランダムネスの表現。数理科学 267 — 9 (1985) 12–16.

Spatiotemporal Chaos の特徴づけをめぐって

東大・教養 金子 邦彦

§ 1. 序

近年の chaos の研究は、自然現象の示す複雑さの解析への第一歩といえる。しかし、自由度の大きい系では、それに固有な複雑さの起源があると思われる。むしろ、伝統的な統計力学は大自由度系を扱う有力な手法であろうが、乱流をはじめとした多くの系では、そういった方法では扱えない現象が多くあると思われる。ここでは、そのような複雑さを示す簡単なモデルを呈示し、それを定性・定量的に調べることにより、Spatiotemporal Chaos 研究への道を拓くことを目指す。

§ 2. モデル

状態、時間、空間を離散ないし連続にするかで³通りの力学系が考えられるが、ここでは、状態のみ連続、時空間は離散のモデルとして coupled map lattice (CML) を用いる¹⁾。利点としては、力学系研究の成果に立脚し、乱流現象を捉えられるということ、数値計算の容易さにより、普遍的現象の予測をし易いということなど。

モデルとしては local dynamics と、空間的 coupling 項から発展する系であれば何でもよいが、ここでは主に

$$(I) \quad x_{n+1}(i) = (1 - \varepsilon) f(x_n(i)) + \frac{\varepsilon}{2} \{f(x_n(i+1)) + f(x_n(i-1))\}$$

を調べる。 $f(X)$ は local dynamics で、以下では logistic map : $\lambda x(1-x)$ ないし、circle map : $x + a \sin 2\pi x + c \pmod{1}$ 。 n が時間、 i が 1 次元格子。