Title	振動,興奮系における余次元2の分岐(カオスとその周辺,研究会報告)
Author(s)	坂口, 英継
Citation	物性研究 (1987), 48(4): 294-296
Issue Date	1987-07-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/92633
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

研究会報告

振動，興奮系における余次元2の分岐

京大・理　坂　口　英　継

パラメーター2つを適当に選ぶと見つかる分岐を余次元2の分岐と言う。余次元1の分岐より特殊な状況を考えることになるので，重要性が低いといえるかもしれない。しかし余次元2の分岐点は余次元1の分岐ラインのターミナルになっている場合や中継点となっている場合が多く，系のふるまいを表わす相図の中ではかなめの点となっている。

ここでは振動の発生を表わすHopf分岐と振動状態が興奮状態へ遷移するsaddle-node分岐の交差点周辺のふるまいに注目する。神経系の活動度のダイナミクスをモデル化したWilson-Cowanの方程式を具体的に計算して，定常状態，振動状態，興奮状態の間の遷移のようすを調べる。

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -x + f_x(c_1x - c_2y + P) = F(x,\ y) \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -y + f_y(c_3x - c_4y + Q) = G(x,\ y) \end{cases}$$

x，y はそれぞれ興奮性神経細胞集団，抑制性神経細胞集団の平均発火率で0と1の間の値をとる。c_1，c_2，c_3，c_4 は神経細胞間の平均シナプス強度を表わし，P，Q は神経細胞への外からの入力を表わす。f_x，f_y は入力に対する発火のレスポンスを表わすS字型関数で今回は，$f_x(z) = f_y(z) = \int_{-\infty}^{z} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$ を用いた。

まずこの系の定常解，つまり $F(x,\ y) = 0$，$G(x,\ y) = 0$ の解を探す。
$\dfrac{\partial G}{\partial y} = -1 - c_4 f_y'(c_3 x - c_4 y + Q) < 0$ なので，曲線 $G(x,\ y) = 0$ はある関数 $g(x)$ を使って $y = g(x)$ とかける。したがって $F(x,\ y(x)) = 0$ の解を求めればよいことになる。一変数関数の解の分岐はカタストロフィー理論によって分類されている。例えば，$c_4 = 0$，$c_2 = 4\pi^2 c_3^{-3}$，$c_1 = \sqrt{2\pi} + \dfrac{c_2 c_3}{\sqrt{2\pi}}$，$P = -\dfrac{1}{2}(c_1 - c_2)$，$Q = -\dfrac{c_3}{2}$ は蝶のカストロフィー点である。蝶のカタストロフィーのnormal form は $z^5 + \mu_3 z^3 + \mu_2 z^2 + \mu_1 z + \mu_0$ と書け，定常解の個数はパラメーターとともに1個，3個，5個と変ってゆく。

次に定常解の安定性を調べる。通常の方法で定常解のまわりの線形化方程式をつくり，その固有値を求める。2つの固有値がともに0になる分岐点をArnold-Takens-Bogdanov 分岐点

と呼ぶ。この分岐点でHopf 分岐と saddle-node 分岐が交まわる。蝶のカタストロフィーを生じるパラメーターの中でさらに2つの固有値がともに0になる条件を課すと, $c_1=2\sqrt{2}$, $c_2=\sqrt{2\pi}$, $c_3=\sqrt{2\pi}$, $c_4=0$, $P=-\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$, $Q=-\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ というパラメータの値が得られる。このパラメータで蝶のカタストロフィーでかつA. T. B.分岐という余次元の高い分岐が生じる。この分岐の normal form は

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt}=w \\[2ex] \dfrac{dw}{dt}=(\nu_0+\nu_1 z+\nu_2 z^2)\,w+\mu_0+\mu_1 z+\mu_2 z^2+\mu_3 z^3-z^5 \end{cases}$$

となる。ν_0, ν_1, μ_0, μ_1, μ_2, μ_3 は小さな量で ν_2 は1のオーダーの量。この分岐の解析はやっていないがかなり複雑なものになると思われる。Wilson-Cowanモデルは少なくともこの分岐点を1つもっているので, その相図はかなり複雑なものになる。以下ではWilson-Cowanモデルを数値計算した結果を示す。

図1は $c_2=4.0$, $c_3=10.0$, $c_4=0$, $Q=-4.5$ と固定して c_1 とPを変えた時の相図である。3つのカスプc′, c″, c‴ から2つずつ saddle-node 分岐ラインが出ている。c′ と c″ から出ている saddle-nodeラインにはさまれている領域では定常解の数は3つで, それらが互いに重なっている預域では定常解の数は5つである。saddle-node分岐ラインとHopf分岐ライン(H)が接している点がA. T. B. 分岐点である。このA. T. B. 分岐点からはさらにホモクリニック分岐のラインが出ている。Hopf 分岐で生じたリミットサイクルがホモクリニック分

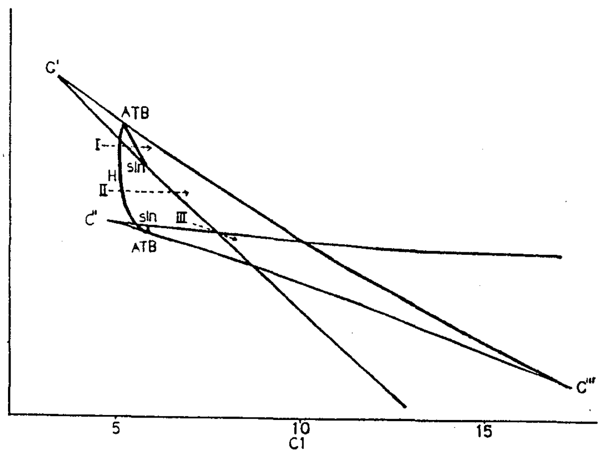

図 1

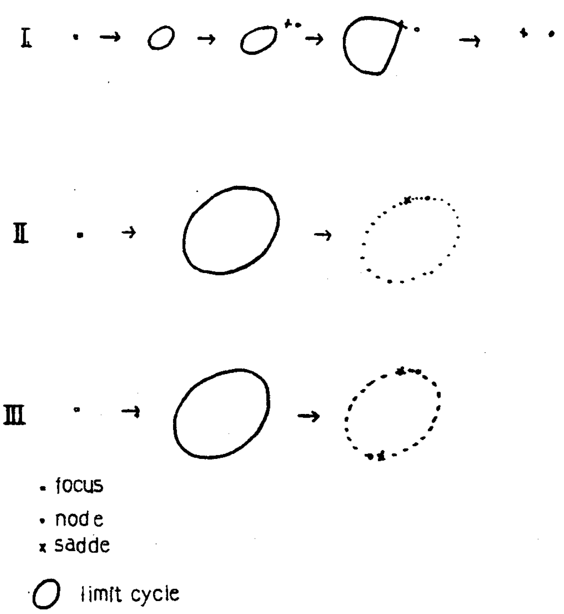

図 2

岐でサドルのマニフォールドと接して，リミットサイクルが消滅する。ホモクリニック分岐ライン(saddle-loop分岐ともいう)がsaddle-node分岐ラインと交わる点はsaddle-loop-node分岐点(sln)と呼ばれる。この分岐点より相図の右側にあるsaddle-node分岐ではリミットサイクルの周上でsaddleとnodeが対生成する。その時生じるnodeはわずかなずれに対しては安定だが，ある程度ずれが大きいともとのリミットサイクルにそって一周してからnodeに近づく。この意味でsaddle-loop-node分岐点の右側のsaddle-node分岐の近くでは系は興奮状態にあるといえる。図2に図1の中に描いた線にそってパラメーターを動かした時のふるまいの概略を示す。単安定，双安定，振動状態，興奮状態の遷移のようすがわかる。

エントロピーとコンプレキシティ

大阪市大・理　釜　江　哲　朗

無秩序さを表す量としてのエントロピーは，確率分布に対する量であるため，観測された現象に対して適用するには，確率空間の設定が必要となる。この意味で，エントロピーは現象の無秩序さを直接表現しうる量とはいえない。コンプレキシティ(complexity)は，対象のもつ論理的な複雑さを表現する量として，1960年代にA. N. KolmogorovとG. J. Chaitinによって導入された。それは，現象の無秩序さのより直接的な表現となっている。

考察の対象とするものの全体をWとする。Wは以下のN及びDを含むものとする。Wの各元は，一定の手続きで番号付け可能なものとする。この番号付けによって，Wは$\boldsymbol{N}=\{0, 1, 2, \cdots\cdots\}$と一対一に対応する。この対応によって，$\boldsymbol{N}$上の計算可能性に関する概念がW上に移される。長さ有限な0と1の列の全体をDとする。Dの元ξの長さを$L(\xi)$と書く。W×DからWへの部分的に計算可能な関数fを考える。ここで，関数$f(x, \xi)$が部分的に計算可能であるとは，入力$(x, \xi)\in$W×Dに対して出力$f(x, \xi)\in$Wを計算する手続きが存在することをいう。この手続きの概念は数学的に明確にされねばならないが，ここでは，計算機のプログラムを思い浮べることにしよう。入力$(x, \xi$に対して，計算が完了しない場合もある。このようなとき，$f(x, \xi)$は定義されてないものと考える。「部分的に」というのは，関数fの定義域がW×Dの全体とは限らないことを意味する。

Wの元x, yに対して，xを与えた上でのyのfーコンプレキシティを