参考文献

1) N. J. Holter and W. R. Glasscock: J. Acoust. Soc. Am. **24** (1952) 682.
2) K. Adachi and R. Takaki: J. Phys. Soc. Jpn. **53** (1984) 4184.
3) R. Takaki and K. Adachi: J. Phys. Soc. Jpn. **54** (1985) 2462.
4) R. Takaki, N. Yoshiyasu, Y. Arai and K. Adachi: *Science on Form, Proc. 1st Int. Symp. Sci. Form*, ed. S. Ishizaka *et al.* (KTK Scientific Publishers, Tokyo and Reidel Publ. Co., Dordrecht, 1986) p. 67.
5) S. Kai and S. C. Müller, Science on Form **1** (1985) 9.

35. Theory of Thin Elastic Rod

東京都立大・理　鶴　秀　生

1次元の連続体である Thin Rod の strain による elastic energy Uはオイラー角θ, φ, ϕを用いると

$$U=\frac{A}{2}\int(\theta'^2+\sin^2\theta\varphi'^2)\,ds+\frac{C}{2}\int(\cos\theta\varphi'+\phi')^2 ds$$

と表わされる。また Kinetic energy. Kは

$$K=\frac{\rho}{2}\int\dot{\boldsymbol{r}}^2 ds+\frac{K_1}{2}\int\dot{\boldsymbol{t}}^2 ds+\frac{K_2}{2}\int(\cos\theta\dot{\varphi}+\dot{\phi})^2 ds$$

と表わされる。この2つのU, Kから得られる Lagrangian を

$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{t}$$

という拘束条件のもとでの変分をとることによって, Thin Rod の従う運動方程式を得ることができる。

運動方程式の中の時間微分の項を0とおけば平衡状態の形をきめる方程式が得られ，それらは次のようになる。

$$\begin{cases} A(\sin\theta\cos\theta\,\varphi'^2-\theta'')-C\alpha\sin\theta\,\varphi'-\lambda\sin\theta=0 \\ A(\sin^2\theta\,\varphi''+2\sin\theta\cos\theta\,\theta'\varphi')-C\alpha\sin\theta\,\theta'=0 \\ \phi'+\cos\theta\,\varphi'=\alpha=\text{const.} \end{cases}$$

これらの方程式の厳密解は楕円関数や双曲線関数を用いて表わすことができる。また

$$\boldsymbol{t}=(\sin\theta\sin\varphi,\ -\sin\theta\cos\varphi,\ \cos\theta)$$

$$t_x=-\frac{1}{\lambda}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\{A\sin\varphi\,\theta'+A\sin\theta\cos\theta\cos\varphi\,\varphi'-C\alpha\sin\theta\cos\varphi\}$$

$$t_y=-\frac{1}{\lambda}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\{A\cos\varphi\,\theta'-A\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\,\varphi'+C\alpha\sin\theta\sin\varphi\}$$

などの関係式を利用することによって，厳密解に対応する。実空間での Thin Rod の形を計算することができる。

strain が最初からある時の Rod の微少振動の性質を運動方程式をもとに調べることができる。

平衡状態の形が

$$\theta=\theta_0$$
$$\varphi=\varphi_0' s$$
$$\phi=\phi_0' s$$

のようならせんであるとき，微少振動の波数 k と振動数 ω の分散関係は次のような成分

$$M_{11}=\frac{\omega^2}{k^2}\{\rho+k_1k^2-\frac{(\phi_0'^4-3k^2\phi_0'^2)\cos^2\theta_0}{(k^2-\phi_0'^2)^2}\}$$
$$+\{(C-2A)\cos^2\theta_0+(A-C)\}\phi_0'^2+C\alpha\phi_0\cos\theta_0-Ak^2,$$

$$M_{12}=M_{21}=\frac{-2k\rho\omega^2}{(k^2-\phi_0'^2)^2}\cos\theta_0\sin\theta_0\phi_0'+k\sin\theta_0\{(C-2A)\cos\theta_0\phi_0'+C\alpha\}$$

$$M_{13}=M_{31}=Ck\phi_0'\sin\theta_0$$

$$M_{22}=\omega^2\{\frac{\rho}{(k^2-\phi_0'^2)^2}(\phi_0'^2+k^2)\sin^2\theta_0+k_1(\cos^2\theta_0+1)\}$$
$$-k^2(C\cos^2\theta_0+A\sin^2\theta_0),$$

$$M_{23} = M_{32} = \cos\theta_0 \, (2k_1 \omega^2 - Ck^2) \; ,$$

$$M_{33} = 2k_1 \omega^2 - Ck^2 \, ,$$

の行列Mの行列式から得られるω^2の３次方程式から求めることができる。φ_0'，ϕ_0'がKより大きい時ω^2が負となる解が存在し，それに対応する微少振動が不安定になることがわかる。

このように Thin Rod の平衡状態の形やそのまわりでの微少振動の性質などを，オイラー角を使って表わした運動方程式をもとに議論することができる。

参考文献

H. Tsuru: J. Phys. Soc. Jpn. **55** (1986) 2177.

H. Tsuru: J. Phys. Soc. Jpn. **56** (1987)