

- 1) H. Hayakawa: submitted to J. Phys. A. (Letter to the Editor).
- 2) H. Takayasu and I. Nishikawa: *Proc. of 1st. Int. Symp. "Science on Form"* (KTK Sci. Publ. 1986) p. 15.
- 3) H. Hayakawa, M. Yamamoto and H. Takayasu: *Prog. Theor. Phys.* 78, No. 1 (1987).

34. 蒸発する液滴のパターン形成とパターン遷移

東京農工大 高木隆司
電通大 安達 健

要 旨

室温中で蒸発を続けている液体窒素等の液化ガスの液滴には, 自励振動が生じる。特に, 水平面に投影した形については, 周辺に数個の波を持つモードが現れ, 蒸発によって液滴のサイズが減少するにつれてモードが突然遷移することが知られている。この自励振動に対して, マチュー方程式に非線形項を加えたモデル方程式を提案し, その数値解を求めた。結果は実験事と定性的に一致している。

1. 導 入

蒸発という熱的な非平衡状態のもとで液滴が振動することは, 日常しばしば観察されるが, 学術雑誌に最初に報告されたのは 1952 の Holter らによる実験であろう¹⁾ この実験では, 加熱した水平な板の上に水滴をのせて, その振動の様子が撮影されたが, それ以上の定量的な測定はなされていない。筆者らは, これと同様の実験を, 液体窒素, 液体酸素, 液体アルゴン等の液化ガスを用いて行い, 振動の観察, および振動数の測定を行った²⁾ それによれば, 液滴は平均として円板状の形になり, 円板の半径によってほぼ決った波の数 n を持つ基準振動が現れること, 蒸発によって半径が減少すると波の数の少ないモードに突然遷移することを示した。(Fig. 1, 2) このとき, モード遷移の前後で振動数がほぼ一定に保たれる傾向があることもわかった (Fig. 2 において, 周期 T が約 0.04 秒の周囲で上下していること)。このような振動現象の解析方法として, 定常なサイズの液滴を仮定してその基準振動を求めることが, やはり筆者らによって行われている³⁾ これは, 非粘性流体の方程式, および表面張力を考慮した境

研究会報告

界条件を採用し、無限小振幅の基準振動に適用したものであり、結果は測定された振動数とよく一致する。ただし、モード（波の数 n を表わされる）の選択や、遷移については、非線形効果や熱的非平衡の効果が重要と考えられるので、この解析法では扱えない。

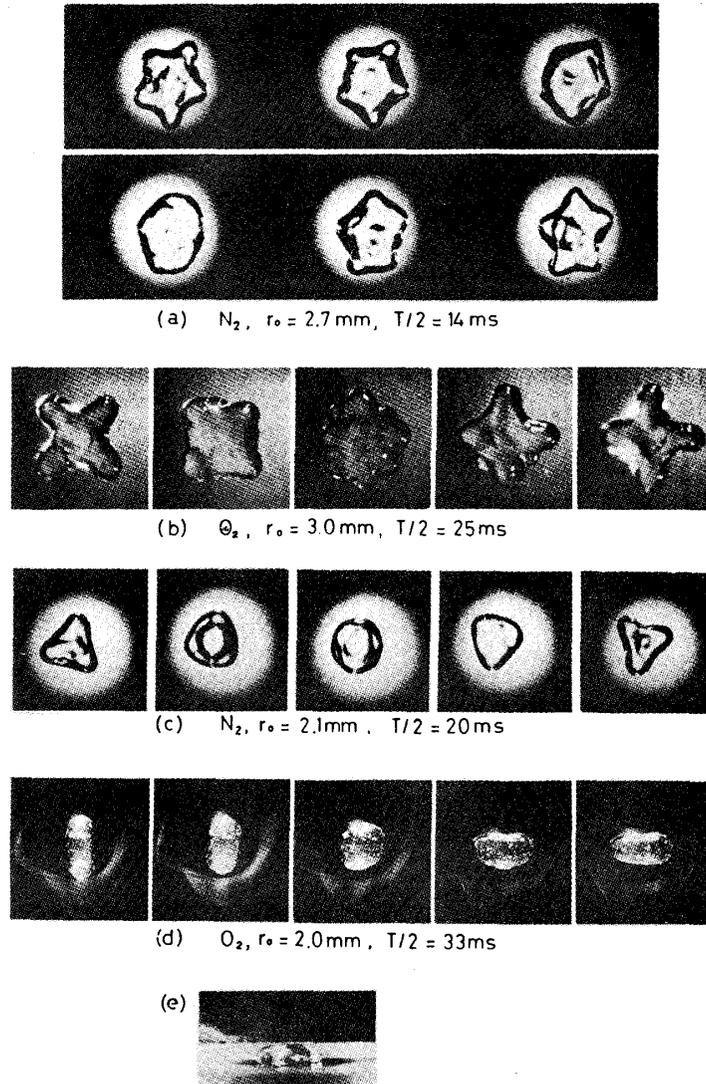


Fig. 1. Sequences of drop vibration during half-period. From (a) to (d), plane views for $n=5$ to 2, respectively. (e) is the side view for $n=4$. (from Adachi & Takaki: 1984)

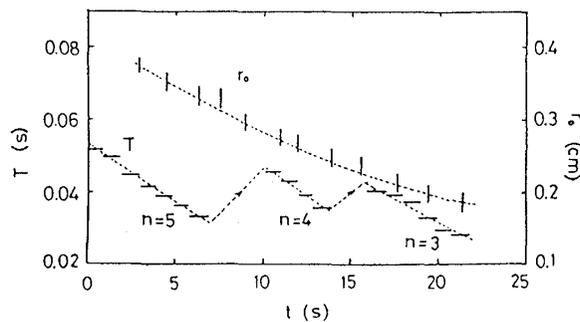


Fig. 2. Variations of mean radius r_0 and period T of vibration during one run of experiment for liquid- O_2 . (from Adachi & Takaki: 1984)

これらの効果を考えるためには、ナビエ・ストークス方程式、あるいはオイラー方程式を基にしたのでは複雑になりすぎるので、適当なモデル方程式を立ててシミュレーションを行うことが筆者らによって行われた⁴⁾。その結果は、モードの選択と遷移を定性的によく再現している。本論文においては、その計算をさらに精密に行い、非線形性と非平衡性を表わすパラメータについて（後述する ε と α ）現象を整理し、 ε や α にどのように依存するかを調べてみた。

2. モデル方程式

自励振動の解を持つ方程式としては、ファン・デア・ポール方程式とマチュー方程式が知られている。ここでは後者を採用する。その理由は、前節で述べたように遷移の前後で一定の振動数を保とうとする傾向があり、その角振動数（ ω_0 とする）を方程式の内に含ませることができるからである。さらに、粘性等による減衰の項、非線形項をつけ加えて、波数 n の振動モードの変位

$$u_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\theta, t) e^{in\theta} d\theta \quad (1)$$

に対して次の連立微分方程式を仮定する。

$$\ddot{u}_n + r \dot{u}_n + NL_n(u) + \omega^2(n, t) u_n = 0. \quad (2)$$

ただし、 \dot{u}_n は u_n の時間微分を表わし、

$$NL_n = \text{Fourier Transform of } \varepsilon u \dot{u}, \\ \omega(n, t) = 2.5(n-1)(1+\beta t)^{3/2}(1+\alpha \cos(2\omega_0 t))$$

である。上記の方程式等は、液滴の半径 r_0 、 $(\sigma/\rho r_0^3)^{1/2}$ で表せる時間スケール T_0 を用いて、すでに無次元化してある（ σ は表面張力係数、 ρ は密度）。実験データ²⁾から、 $\beta = 0.05$ 、 $\omega_0 = 0.63$ 、 $T_0 = 0.05$ と指定できるが、 ε と α の値はまったく未知である。

数値シミュレーションでは、 n として 2～6 の範囲に限り、 ε と α に種々の値を仮定し、初期条件

$$u_n(0) = 0.05 \quad (n \neq 5), \\ u_5(0) = 0.5, \\ \dot{u}_n(0) = 0 \quad (3)$$

のもとで(2)式を解いた。異なるモード(n)間の非線形相互作用は、もちろん NL_n の項を通して

起きている。数値計算では, Runge-Kutta-Gill 法を用いた。

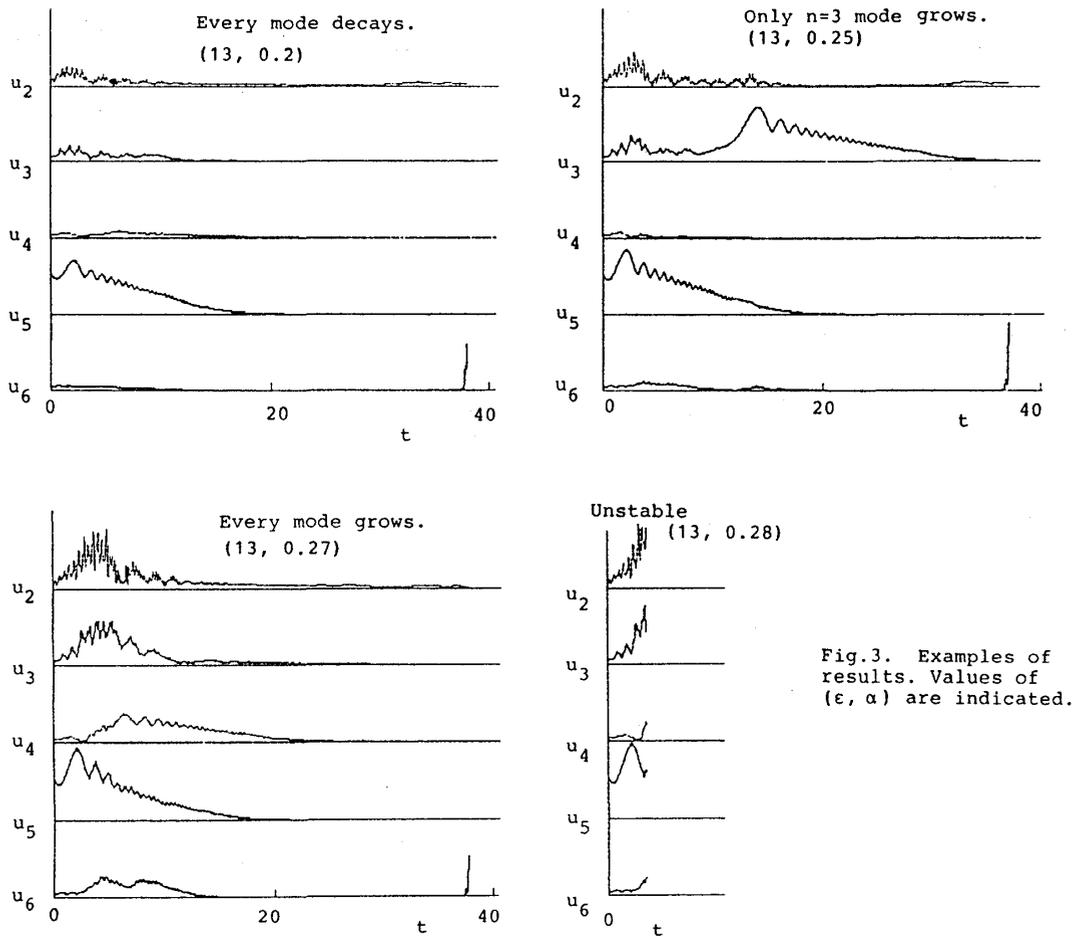


Fig.3. Examples of results. Values of (ϵ, α) are indicated.

3. 計算結果

$n = 2 \sim 6$ の 5 個の振動モードの振幅の変化を, 異なる (ϵ, α) の組み合わせについて求めた例を Fig. 3 に示す。 $t = 37$ のあたりで u_6 が急に立ち上っているのは, 数値計算上の不安定が生じたためであり, それから先の計算は意味がない。この図からわかるように, α の値をわずかに変えただけでモードの盛衰の様子が非常に異なる。

α, ϵ の値を変えてモード遷移の分類を行ったものを Fig. 4 に示す。図中で, 例えば $(4-3-2^*)$ としたものは, 初期に与えた $n = 5$ 以外は $n = 4, 3$ が強くでて, $n = 2$ は弱いながらも出た, という意味である。いくつかのモードが出たり消えたりする過程は, $(\epsilon, \alpha) = (16, 0)$ と $(\epsilon, \alpha) = (0, 0.3)$ をつなぐ曲線の上に集中していることがわかる。

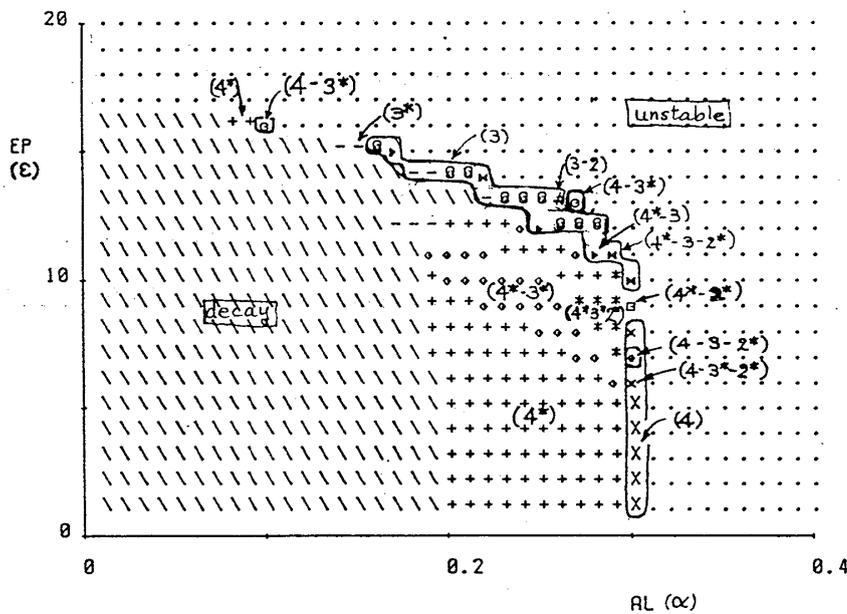


Fig.4. Map of mode transition.

4. 議 論

Fig. 4 の結果の解釈は、まだ十分ではないが、少なくとも次のことは言えるであろう。

- パラメーター α は自励振動を誘起する項にかかる係数であり、非平衡性の尺度と考えてよいだろう。非平衡性が増すにつれて、decay 型から振動型、不安定型へと変っていく傾向がある。
- 他のパラメーター ε の値は不明であるが、元来、非線形性の強さは振動が起きれば決ってくるはずのものである。物質と液滴の体積を与えれば、 ε と α と独立ではない可能性がある。仮に、上述した振動モードが現れる曲線に沿って ε の値が決ると仮定すると、特に $\varepsilon \cong 13$ のあたりでは、 α の値をわずかに変えただけでモードの現れ方が大きく変わる。すなわち、非平衡性の程度に敏感に依存する。

実は、液体酸素の場合と液体窒素の場合で、モードの現れ方が非常に異なることが観察されているが²⁾ 上記 b はこのことと関係しているかも知れない。

以上から推察されるように、平衡状態から大きくずれた液体の運動には、定性的にも不明な問題点が多くあり、興味ある研究対象である。ちなみに、蒸発ではなく二液界面での化学変化が原動力になって界面に振動が起きることが Kai らによって観察されているが⁵⁾ この現象と本論文で扱った振動は、共通点があることを注意しておきたい。

参考文献

- 1) N. J. Holter and W. R. Glasscock: J. Acoust. Soc. Am. 24 (1952) 682.
- 2) K. Adachi and R. Takaki: J. Phys. Soc. Jpn. 53 (1984) 4184.
- 3) R. Takaki and K. Adachi: J. Phys. Soc. Jpn. 54 (1985) 2462.
- 4) R. Takaki, N. Yoshiyasu, Y. Arai and K. Adachi: *Science on Form, Proc. 1st Int. Symp. Sci. Form*, ed. S. Ishizaka *et al.* (KTK Scientific Publishers, Tokyo and Reidel Publ. Co., Dordrecht, 1986) p. 67.
- 5) S. Kai and S. C. Müller, *Science on Form* 1 (1985) 9.

35. Theory of Thin Elastic Rod

東京都立大・理 鶴 秀 生

1次元の連続体である Thin Rod の strain による elastic energy U はオイラー角 θ, φ, ϕ を用いると

$$U = \frac{A}{2} \int (\theta'^2 + \sin^2 \theta \varphi'^2) ds + \frac{C}{2} \int (\cos \theta \varphi' + \phi')^2 ds$$

と表わされる。また Kinetic energy K は

$$K = \frac{\rho}{2} \int \dot{\mathbf{r}}^2 ds + \frac{K_1}{2} \int \dot{\mathbf{t}}^2 ds + \frac{K_2}{2} \int (\cos \theta \dot{\varphi} + \dot{\phi})^2 ds$$

と表わされる。この2つの U, K から得られる Lagrangian を

$$\mathbf{r}' = \mathbf{t}$$

という拘束条件のもとでの変分をとることによって、Thin Rod の従う運動方程式を得ることができる。

運動方程式の中の時間微分の項を0とおけば平衡状態の形をきめる方程式が得られ、それらは次のようになる。