Title	33. 凝集現象に於ける巾分布(基研研究会「パターン形成,その運動と統計」,研究会報告)
Author(s)	早川, 尚男; 高安, 秀樹
Citation	物性研究 (1987), 49(1): 102-105
Issue Date	1987-10-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/92833
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

らしく〃なる。

（実際，生態系をイメージしたモデル[3),4),5)]においては振動的なゆらぎは普通あり，ここで示したものは，その中で最も単純なものと考えられる。）

講演では，秩序変数の振舞いと平均場理論の比較，絶滅のおこり方のシステムサイズ依存性，ゆらぎの各振動数成分の空間的広がりなどについて論じた。

1) 生物学においては，たとえば，Matsuda, Prog. Thoret. Phys. **66** (1981) 1078.
   松田博嗣　数理科学　1986. 10月.
2) Grassberger, de la Torre, Ann. Phys. N.Y. **122** 373.
3) 松尾和洋　国際情報研研究報告 16
   統数研・研究会　1987. 1月.
4) 佐藤和弘　統数研・研究会　1987. 1月.
5) デュードニー*　日経サイエンス　1985. 2月
   （＊コンピューター・リクリエーションのコラム）

33. 凝集現象に於ける巾分布[1)]

神戸大・理学部　早川尚男，高安秀樹

不可逆的凝集過程に於ける幾何学的性質としてのクラスターのフラクタル性が世間の耳目を集める様になって久しいが，我々はその統計的性質に着目し，スケーリング則，巾乗則の成因を探ってみた。そこで得られた結論は平均場近似であるSmoluchowski方程式で記述される系に於て定常的な粒子生成を伴う場合には漸近的或いは臨界的でのクラスターの巾的サイズ分布を見い出したことにある。この際得られた表式は巾の指数が臨界現象の有無に拘らずユニバーサルであり，拡散律速凝集（DLA），反応律速凝集（RLA）の双方にも適用できる。

一般に，凝集現象は粒子の生成或いは外界よりの注入と沈澱等の除去効果を伴っているので，平均場近似の範囲でクラスターサイズ k（k－mer）の濃度の時間発展は次の方程式で記述される。

$$c_k = \frac{1}{2}\sum_{i+j=k} K_{ij} c_i c_j - c_k \sum_{j=i}^{\infty} K_{kj} c_j + I_k - R_k c_k \tag{1}$$

ここでK_{ij}はi-mer，j-mer間の結合確率を表す。生成項I_k，除去項R_kは各過飽和状態や化学反応による核生成，重力による沈澱が具体的に考えられる。(1)式でK_{ij}は如何なる過程に従って凝集するかに依存して決定されるが何れの場合にも次の性質を持つ。

$$
\begin{aligned}
&K_{ij} \sim i^{\mu} j^{\nu} && (j \gg i) \\
&K_{ai,aj} \sim a^{\lambda} K_{i,j} && (\lambda = \mu + \nu)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

そこで我々は(2)式の特性を失わない最も簡単な場合として

$$
\begin{aligned}
&K_{ij} = K(i^{\mu} j^{\nu} + i^{\nu} j^{\mu}) \qquad (\nu \geq \mu) \\
&I_k = I\delta_{k1}\ ;\ R_k = 0
\end{aligned}
\tag{3}
$$

を選び解析してみた（K，Iは定数）。実際にエアロゾル等の過飽和状態からの核生成では，粒子の生成に伴う過飽和の緩和は無視できるので(3)式の生成項は実情に合致している。$R_k=0$と選んだのは，沈澱等の項が無視できる場合に凝集現象の特性が浮び上がってくると期待した為である。その意味で，(3)式は余り大きなクラスターには適用できない。

先づ，我々は(1)式の定常解を求めてみた。n次のモーメントを

$$
M_n \equiv \sum_k k^n c_k \tag{4}
$$

で定義する。ここで母関数$f_n(x)$を導入する（$x \to 0$で展開）

$$
f_n(x) \equiv \sum_k k^n c_k \, \mathrm{e}^{-kx} \sim M_n + a_n x^{\alpha_n} + o(x^2) \tag{5}
$$

但し，$x=0$でf_nは連続より$\alpha_n > 0$が成立する。$x=0$で$f_n(x)$が正則であれば$\alpha_n = 1$であることに注意して欲しい。(1)式に(3)(4)を代入した式を元にして，e^{-kx}をかけてkについて和をとったものと，単にkについて和をとったものの差をとれば(5)より

$$
0 \simeq K a_{\mu} a_{\nu} x^{\alpha_{\mu}+\alpha_{\nu}} - Ix \tag{6}
$$

を得る。従って$f_n(x)$の正則性は破れる。このとき(5)の右辺第二項が leading singular となり，

$$
\left. f_n(x) \sim a_n x^{\alpha_n} \iff k^n c_k \sim \frac{a_n k^{-\alpha_n - 1}}{\Gamma(-n)} \right\} \tag{7}
$$

と言う公式を用いれば結局

$$
c_k \simeq \left(\frac{I(1-4\alpha^2)\cos\pi\alpha}{4\pi K} \right)^{1/2} k^{-\frac{3+\mu+\nu}{2}} \tag{8}
$$

を得る。このとき(7)式の a_n の発散，クラスター総数の有限性，Γ 関数の正則性より $|\mu-\nu|<1$, $|\mu+\nu|<1$ と云う制限がつく。この領域で有限時間にはGelation が生じないことは知られており定常状態の存在に対し自己無撞着である。

凝集現象で最も普通に観測されるのは Brown 運動をしながら凝集を繰り返す場合である。この時 K_{ij} は $(i^{1/3}+j^{1/3})(i^{-\frac{1}{3}}+j^{-\frac{1}{3}})$ に比例することが知られており，我々の用いた手法を直接用いる（即ち(2)式の近似的性質を使う必要がない。）ことが可能で

$$c_k \sim k^{-\frac{3}{2}} \tag{9}$$

を得る。この結果は数値的に(1)式を解くことで予想されていたが，初等的な解析によって初めて確かめた。一般の凝集過程では云うまでもなく，(2)(3)式の近似によって凝集過程を指数 μ，ν で特徴づけた近似的な漸近解を得ることになる。

我々の方法は Gelation のある場合にも適用できる。そのときの解は

$$c_k(t) \simeq \left(\frac{(\dot{M}_1-I)(4\alpha^2-1)\cos\pi\alpha}{4\pi K}\right)^{1/2} k^{-\frac{3+\mu+\nu}{2}} \tag{10}$$

となる。この表式は $\dot{M}_1 \neq I$，即ち質量保存の破れたところで値をもつので Post-gelation での状態の解となっている。尚この場合，$|\mu-\nu|<1$, $\mu+\nu>1$，$\nu\leq 1$ の制限がつく。

以上をまとめると，定常的に粒子生成を伴う場合相転移の有無に拘らずユニバーサルな巾分布が得られたことになる。その表式は

$$c_k \sim k^{-\frac{3+\mu+\nu}{2}} \tag{11}$$

である。これは西川，高安の川のモデル[2]及び早川，山本，高安による１次元系でのシミュレーション（衝撃波のモデル）[3] の基礎付を与えるばかりでなく，宇宙塵や大気エアロゾルの経験的に知られた巾的サイズ分布の説明を与えることになる。

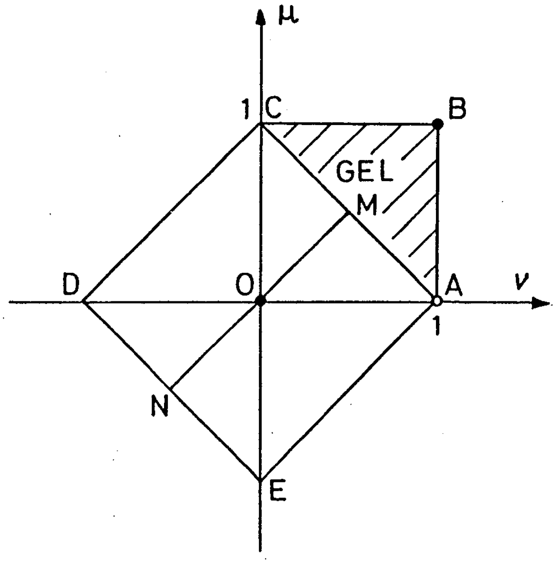

図　得られた解をパラメータ空間で図示したもの。四角形ＡＥＤＣが漸近的巾分布，△ＡＢＣはGelationによる巾分布に従う。巾の指数は何れも(11)式に従う。O，MN，A，Bは従来得られていた結果。

1) H. Hayakawa: submitted to J. Phys. A. (Letter to the Editor).

2) H. Takayasu and I. Nishikawa: *Proc. of 1st. Int. Symp. "Science on Form"* (KTK Sci. Publ. 1986) p. 15.

3) H. Hayakawa, M. Yamamoto and H. Takayasu: Prog. Theor. Phys. **78,** No. 1 (1987).

34. 蒸発する液滴のパターン形成とパターン遷移

東京農工大　高　木　隆　司

電　通　大　安　達　　　健

要　旨

室温中で蒸発を続けている液体窒素等の液化ガスの液滴には，自励振動が生じる。特に，水平面に投影した形については，周辺に数個の波を持つモードが現れ，蒸発によって液滴のサイズが減少するにつれてモードが突然遷移することが知られている。この自励振動に対して，マチュー方程式に非線形項を加えたモデル方程式を提案し，その数値解を求めた。結果は実験事と定性的に一致している。

1. 導　入

蒸発という熱的な非平衡状態のもとで液滴が振動することは，日常しばしば観察されるが，学術雑誌に最初に報告されたのは 1952 の Holter らによる実験であろう。[1] この実験では，加熱した水平な板の上に水滴をのせて，その振動の様子が撮影されたが，それ以上の定量的な測定はなされていない。筆者らは，これと同様の実験を，液体窒素，液体酸素，液体アルゴン等の液化ガスを用いて行い，振動の観察，および振動数の測定を行った。[2] それによれば，液滴は平均として円板状の形になり，円板の半径によってほぼ決った波の数 n を持つ基準振動が現れること，蒸発によって半径が減少すると波の数の少ないモードに突然遷移することを示した。(Fig. 1, 2) このとき，モード遷移の前後で振動数がほぼ一定に保たれる傾向があることもわかった(Fig. 2において，周期 T が約 0.04 秒の周囲で上下していること)。このような振動現象の解析方法として，定常なサイズの液滴を仮定してその基準振動を求めることが，やはり筆者らによって行われている。[3] これは，非粘性流体の方程式，および表面張力を考慮した境