30. 相転移，クラスター形成及びフラクタル 静的モデルと動的モデル

東大・理　伊藤伸泰，鈴木増雄

§ 1. はじめに

まず，我々が以下で使っているフラクタル（自己相似）という言葉の意味を明確にしよう。

考えている系に，スケールとよばれる量Lと，系の性質を表す量A_Lとがあるとする。さらに，スケールbLの系をスケールLの系に写すスケール変換と呼ばれる写像があるとする。このスケール変換のもとで，A_LがL^Dのように振舞う時に，この系は，考えているスケールと量，及びスケール変換のもとでフラクタル（または，自己相似）である，と呼ぶ。あるいは，単に，この系はフラクタルである，と呼ぶ。フラクタルである時には，

$$D=\frac{\log(A_{bL}/A_L)}{\log(b)} \tag{1-1}$$

である。

フラクタルの考え方が非常に有効な場合は多い。一見乱雑にみえるパターンが，フラクタルで特徴づけられる場合がある。マンデルブロ[1]，高安[2]には実例が詳しく扱われている。

我々は，Ising model の臨界現象の裏に，フラクタルパターンが隠されていることを明らかにした。[3] このフラクタル性は，ミクロなハミルトニアンとマクロな臨界現象とをつなぐ鍵であると考え，研究を進めている。以下では，「パターン形成，その運動と統計」の観点からこのフラクタル性を議論する。

§ 2. Ising model の臨界点における各配位でのフラクタル性

相関関数$\Gamma(r)$は，臨界点付近で，$r^{-a}\exp(-r/\xi)$の様に振舞う。ここで，ξは相関長で，$t=T-T_c$として，$\xi\sim t^{-\nu}$である。このため，臨界点でないところでは，系は，スケール不変にはなっていない。しかし，臨界点では，$\Gamma(r)\sim r^{-(d-2+\eta)}$であり，平衡状態で平均した量でのみ系はフラクタルになっている。さらに，finite size scaling を使えば，サイズLの系の臨界点でのスピン1個あたりの帯磁率χは，$L^{\gamma/\nu}$と振舞う。これは，平均量での臨界点でのフラクタル性を，より明確に表している。

平均量が臨界点でフラクタルである，といっても，単に良く知られている事に名前をつけた

だけであって，特に新しいことが分ったわけではない。

我々は，この平均量の自己相似性の裏に，平均する前の各配位の自己相似性があることを明らかにした[3]。つまり，各配位が，磁化でみた時に，ブロックスピン変換のもとで，次元

$$D = d - \beta/\nu = \frac{1}{2}(d + \gamma/\nu) \qquad (2-1)$$

をもつフラクタル性を示すのである。ここで，β，γ は自発磁化，帯磁率の臨界指数である。

この各配位でのフラクタルは，平均量のそれよりもさらに詳細な情報を含んでいるであろう。それゆえ，臨界現象の理解にとって重要な性質である。

§3. スケーリングとの関係

有限系の臨界点での磁化の分布関数 $P_L(M)$ は，L^D でスケールされる[4]：

$$P_L(M) = L^{-D} P(ML^{-D})\,。 \qquad (3-1)$$

このことと，各配位での磁化によるフラクタル性との関係はどうなっているのか。

フラクタル性から，このスケーリングが導かれる事は見やすい。なぜならば，L^D の系の磁化 M_L が，スケール b のスケール変換のもとで，b^{-D} と振舞うのであるから，L より小さい系の磁化の分布関数は，L の系の磁化の分布関数を L^D でスケールしたものとなるからである。

では，P_L のスケーリングからフラクタル性は自明であるといえるであろうか。これは，単純ではない。一見して L^D でスケールされているから当然だ，とは言えないことを以下で示す。

一般的に，サイズ L の系の量 A_L の分布関数 $P_L(A_L)$ が，L^D でスケールされているとし，そのスケーリング関数を P とする：

$$P_L(A_L) = L^{-D} P(A_L L^{-D}) \qquad (3-2)$$

P_L，P は次のように規格化されているとする：

$$\int P_L(x)\,\mathrm{d}x = \int P(x)\,\mathrm{d}x = 1 \qquad (3-3)$$

スケール変換 τ（スケール b とする）は，サイズ bL の系の量 A_{bL} をサイズ L の系の量 A_L に写す変換である。ここでは，τ は，サイズ bL の系の任意の状態をサイズ L の系のすべての状態に，サイズ L の系の分布にしたがって写像するものであるとする。このとき，(1−1) の D の期待値とその分散は，以下のようになる：

$$< D(A_{bL}, A_L) > = D, \tag{3-4}$$

$$< (\Delta D(A_{bL}, A_L))^2 > = 2 \ll \{\Delta(\log x)\}^2 \gg / (\log b)^2 \tag{3-5}$$

但し，

$$D(A_{bL}, A_L) = \frac{\log(A_{bL}/A_L)}{\log(b)}$$

$$< F(x, y) > = \int F(x, y) P_{bL}(x) P_L(y) \, dx \, dy,$$

$$\ll F(x) \gg = \int F(x) P(x) \, dx$$

つまり，Dの平均値は，分布関数をスケールするものの次元に等しいが，分散は0ではないことがわかる。

$b \to \infty$で，$< (\Delta D(A_{bL}, A_L))^2 > \to 0$なので，十分大きい$b$をとれば任意の精度で$D$が決るようにできる。しかし，$(\log b)^{-2}$で0になるので，我々のモンテカルロシミュレーションによる結果を説明するのには不十分である。

例として，平均$\mu = 0$，分散$\sigma^2 = a L^{2D}$の Gauss 分布の場合について計算してみると，

$$< (\Delta D)^2 > = \pi^2 / [4(\log b)^2]$$

であり，$b = 3$とすると，

$$\sqrt{< (\Delta D)^2 >} = 1.43$$

となり，大体1のオーダーの量である。

さて，サイズLの二次元系の磁化M_Lの場合について考える。 K. Binder [4]によるM_Lの分布関数のスケーリングプロットからこの分散を計算してみると，

$$< (\Delta D)^2 > = 1.39 / (\log b)^2$$

となる。$b = 3$とすると，

$$\sqrt{< (\Delta D)^2 >} = 1.1$$

となる。

一方，モンテカルロシミュレーションの結果得られたDの分布は図1のようになった。これ

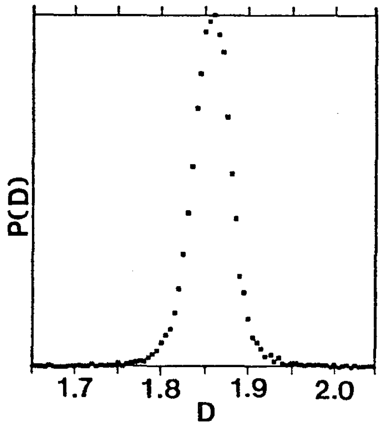

図1　2次元 Ising Model の（無限系での）臨界点での磁化でのフラクタル次元 Dの分布$P(D)$。64 × 64 の系での50万モンテカルロステップの結果より。

より

$$\sqrt{<(\Delta D)^2>} = 0.02$$

であり，先の分布関数のスケーリングのみを仮定して得られた値からは説明できない。（もちろんスケール変換の性質を明らかにすることによって，分布関数で説明することはできるはずである。）

つまり，スケール変換のもとでの系の配位の振舞いを調べるためには，単純なスケーリングについての議論では不十分であり，また，配位のフラクタル性はスケーリングよりも詳しい情報を持ったものであることが分る。

§ 4.　動的モデルの様子

Ising Model には，本来時間発展ははいっていない。そこで，平衡状態に近づくようなダイナミクスをいれて動的な振舞いの研究がされている。

ダイナミクスのいれかたには大別して２種類ある。１つは，モンテカルロ法によるものである。平衡状態に近づくようなマルコフ過程をつくってダイナミクスとするものである。もう１つは，モレキュラーダイナミクス法によるもので，決定論的なダイナミクスである。この場合は，平衡状態へ収束することは，系のエルゴード性によっている。

いづれのダイナミクスにしても，十分時間が経つと，系の配位は，平衡状態で現れる配位となっている。よって，§２で述べた各配位でのフラクタル次元D（磁化でみて）をもつ。

この，いわばフラクタルパターンダイナミクスとしての動的モデルについて調べることは興味深い。

我々は，モンテカルロシミュレーションで調べたのであるが，すぐに気がつくこととして，フラクタル次元Dは，速やかに（スケール $b=3$ では，数モンテカルロステップで）平衡値に近づくことである。[3),5)] このことは，Dが平衡状態でほぼ一定の値を取っていることから考えると当然であろう。

パターンの研究では，まず，研究対象のパターンを眺めることは重要であろう。研究会当日は，Ising Model のモンテカルロシミュレーションのビデオを映写した。このビデオは，我々が泰地真弘人氏（東大理）と共に開発した Ising spin のモンテカルロシミュレーションシステ

ム（イジング・マシーン）[6] による。このシステムは，数百×数百の2次元 Ising Model を一秒あたり数十モンテカルロステップ実行する能力を有する。（残念ながら，本原稿にはビデオは載せられないので，研究会に参加されなかった方々には申し訳ありません。）

§5. まとめ

臨界点での各配位のフラクタル性は，分布関数や平均量のスケーリングよりも詳しい情報を持っているといえる。

文　献

1) B．マンデルブロ，フラクタル幾何学（広中平祐　監訳，日経サイエンス　1985年）.
2) 高安秀樹，フラクタル（朝倉　1986年）.
3) N. Ito and M. Suzuki: Prog. Theor. Phys. **77** (1987) 1391.
   M. Suzuki: Prog. Theor. Phys. **69** (1983) 65.
4) K. Binder: Z. Phys. **B43** (1981) 119.
5) M. Kikuchi and Y. Okabe, Phys. Rev. B to be published.
6) M. Taiji, N. Ito and M. Suzuki, in preparation

31. 移住過程におけるパターン形成

東大・理　劉勇，鈴木増雄

われわれは生態系での個体群の空間移住を念頭において次のような系を研究している：

$$\dot{\vec{N}}_i = R(\vec{N}_i) + \sum_j M_{j\to i}(\vec{N}_i, \vec{N}_j) \tag{1}$$

$\vec{N}_i$ は i サイトにいる個体数，j は i サイトに隣接したサイトとする。第一項はたとえば個体群の生長，競争，捕食等である。第二項の移住項については，通常の反応拡散系と違うある種の非線型性を仮定する。

ここでは，主に手計算のできる範囲内で，種の数が一で，空間サイトが二つだけの場合の挙動を示す。この場合，(1)式の第一項はロジスティック生長だけとする：