定常であることに着目する。このことは結果的には中間スケールにおいてエネルギーの injection があることを意味する。さて最初に不安定を起すモードから inject されたエネルギーは非定常的に小スケールのモードへ伝えられる。このとき最初に inject されたエネルギーは保存されると仮定しているから，エネルギーの transfer rate ε_L は $\varepsilon_L = (\tau_0/\tau_L)\varepsilon_0$ のように変化する。τ_L は重力による運動の time scale であり一般に乱流の特徴的 time scale t_L ではない。しかし密度 ρ_L，長さ L に対する time scale は一つだけ（すなわち $\tau_L = t_L$）であると仮定すると，$\varepsilon_L \tau_L = E_L$ =一定となる。time scale の評価は $E_L = U_L$ と置いて行われたからこれは U_L =一定でもある。これから $\rho_L^2 \propto L^{-2}$，すなわち密度相関関数 $\xi(r) \simeq C(t) r^{-2}$ を得る。このときの係数 $C(t)$ は最初の Instability から inject されるエネルギーの量に比例するから時間と共に増大する。指数 -2 は時間に無関係である。

26. ランダムなパターンの曲率とパーコレイション

京大・教養　冨 田 博 之

相分離の後期過程に見られるような，なめらかでランダムな界面系を考える。構造関数のスケイリング形を議論するためには，このランダムな界面系の統計的性質を調べる必要がある。

Suzuki のスケイリング理論[1]を非保存場のダイナミックスに応用した Kawasaki-Yalabik-Gunton の理論[2]や，Ohta-Jasnow-Kawasaki[3] の理論は，極論すれば，ダイナミックスとしては線形場で扱い，非線形性はオーダパラメタの非線形変換として取り入れたものといえる。保存場のスピノダル分解の問題でも，Langer-Bar'on-Millor[4]の理論や，筆者の理論[5]は，やはりダイナミックスは線形化した上で，近似により現れた未定パラメタを非線形の飽和効果で決めたものといえる。

そこで，これらの近似理論に対応するランダムな界面系の統計的モデルとして，スカラのガウス場の等高面[6]を導入する。2次元ならば，ガウス則に従うでこぼこのある地形に，任意の高さまで海水を満たした時の海岸線のようなもので，どの高さまで海水を満たせば太洋が形成されるか，などの幾何学的に興味深い問題が設定できる。

ガウス場に限っておけば，この等高面の曲率に関する量（平均曲率 H，全曲率 K など）はガウス場の相関関数を使ってすべて計算することができる[7]。ガウス場 $\{u(\boldsymbol{r})\}$ は一様(Stationary)

・等方的かつ Non-erratic として平均・分散・共分散を

$$< u(\boldsymbol{r}) > = 0$$

$$\sigma(r) = < u(0)\, u(\boldsymbol{r}) >$$
$$= \sigma(0) - |\sigma''(0)|\, r^2/2\,! + \sigma^{(4)}\, r^4/4\,! + \cdots$$

とする。以後,

場の振幅：　$\sigma(0) = < u^2 > = 1$

長さのスケール：　$\sigma(0)/|\sigma''(0)| = 1$

と規格化しておく。こうしておけば相関の特徴，したがってパターンの個性は $\sigma^{(4)}(0)$ 以降にしか現れない。たとえば，この曲面のトポロジカルな特徴をとらえる量であるオイラー指標（の密度：χ とする）は全曲率 K から計算できるが，これを，満たされた‘海水面’の高さ U，あるいは同じことであるが‘海面’の組成比 (Volume Fraction ϕ) の関数として表すと，上の意味でのガウス場の相関関数の個性にはよらない普遍的な結果を得ることができる。すなわち d 次元空間の場では

$$\chi = \phi^{(d-1)}(-U)$$

となり，個性を表す量は含まれない。ここで $\phi^{(n)}(x)$ は Hermite 多項式に関連する関数

$$\phi^{(n)}(x) = H_n(x) \exp(-x^2/2)/\sqrt{2\pi}$$

であり，海水面の高さ U と海面の組成比 ϕ は誤差関数により

$$\phi = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{U} \mathrm{d}u \exp(-u^2/2)$$

で関係づけられる。

χ は ϕ が十分小さい時はいわば‘池’または‘液滴’の数の密度であって ϕ の増大とともに増大するが，ある程度組成比 ϕ が大きくなると‘液滴’の合体により減少し始める。そこで $\chi = 0$ になる臨界組成比を ϕ_c とすると，ϕ_c の値はやはり個性によらず普遍的で，その値は $\phi_c = 1\ (d = 1)$，$\phi_c = 0.5\ (d = 2)$，$\phi_c = 0.1586\cdots\cdots\ (d = 3)$ となり，ランダムポテンシアルの問題で調べられているパーコレイションの限界値[8]と非常によく一致している。ϕ_c の値そのものだけでなく，これがガウス場の個性によらない[9]という性質も共通している。おそらく統計トポロジー的な意味づけができるものと思われる。

一方，海陸を区別する非線形場

$$\rho(\mathbf{r}) = \theta(U - u(\mathbf{r}))$$

の空間的相関は，ガウス場の相関関数 $\sigma(\mathbf{r})$から

$$g(r) = <\rho(0)\,\rho(\mathbf{r})> - <\rho^2>$$

$$= (2\pi)^{-1/2} \int_0^{\sigma(r)} ds \exp\left[-U^2/(1+s)\right] / \sqrt{1-s^2}$$

と計算されるが，[10] $\sigma(r)$が長距離異常性を持たない限り，いかなるUの値に対しても $g(r)$には長距離異常性は現れない。すなわち $g(r)$にはゲル化したクラスタだけでなく，すべてのクラスタの寄与が含まれてしまっているから，パーコレーション限界での異常性は隠されてしまっている。この意味でも，パーコレーション限界は上のようにトポロジーとの関連で捉える方が賢明であろう。

文　献

1) M. Suzuki: Adv. Chem. Phys. **46** (1981) 195.
2) K. Kawasaki, M. C. Yalabik and J. D. Gunton: Phys. Rev. **A17** (1978) 455.
3) T. Ohta, D. Jasnow and K. Kawasaki: Phys. Rev. Lett. **49** (1982) 1223.
4) J. S. Langer, M. Bar-on and H. D. Miller: Phys. Rev. **A11** (1975) 1417.
5) H. Tomita: Prog. Theor. Phys. **59** (1978) 1116.
6) R. J. Adler: *'The Geometry of Random Field'* (John-Wiley, 1980).
7) H. Tomita: Prog. Theor. Phys. **76** (1986) 952.
8) R. Zallen and H. Scher: Phys. Rev. **B12** (1971) 4471.
9) A. S. Skal and B. I. Shklovskii and A. L. Efros: JETP Lett. **17** (1973) 377.
10) H. Tomita: Prog. Theor. Phys. **75** (1986) 482.