

22. 片面をのりづけされた板状弾性体の Buckling 不安定性

九大・理 関本謙, 川崎恭治

ゲルは、環境の変化に伴い著しく膨潤する。自由なゲルの板は等方に膨潤するが(図1(a)→(c)), 片面をのりづけしておく、膨潤状態は(仮に)均一であっても1軸異方的である(図1(a)→(b))。後者を基準にして変形場を \vec{w} , 歪みを $\overleftrightarrow{u} = \frac{1}{2}(\vec{\nabla} \vec{u} + \overleftrightarrow{u} \vec{\nabla})$ とすると、板状ゲルの変形エネルギーは $\overleftrightarrow{u}^T \equiv \overleftrightarrow{u} - \text{Tr}[\overleftrightarrow{u}]/3$ として、

$$\begin{aligned}
 E = & \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_0^d dz \left\{ D \left(\text{Tr}[\overleftrightarrow{u}] - \frac{3}{2} u_{zz}^T \right) \right. \\
 & + \frac{K}{2} \text{Tr}[\overleftrightarrow{u}]^2 + \mu \text{Tr}[\overleftrightarrow{u}^T]^2 + L \text{Tr}[\overleftrightarrow{u}] u_{zz}^T \\
 & + 2M (\overleftrightarrow{u}^T)_{zz} + \frac{N}{2} u_{zz}^T \\
 & \left. + \frac{1}{2} C_{lmn}^{\overleftrightarrow{u}} (\partial_l u_{mn}) (\partial_l u_{mn}) + \dots \right\} \quad (1)
 \end{aligned}$$

となる。各項は1軸異方均一系の不変量で、……は高階微分や高次の項である。図1で、 \tilde{d}/d_0 が与えられると、平衡条件から d/d_0 が求まり、また、(1)の弾性定数(K, μ, \dots)も膨潤の度合によって異なる。 E の表式の安定性解析により、図1(b)の均一状態が変調不安定となるような(K, μ, \dots)の領域があることがわかった。

数値解析によれば(K, μ, \dots)の全ての領域を調べたわけではないので絶対とはいえないが、歪み勾配 $\partial_l u_{mn}$ に依存する項をゼロとおくと、変調不安定を短波長で切断する機構がなくなってしまう、波長 $\rightarrow 0$ で負に発散するスペクトルが得られる。定性的には、波数 k の規準モードに対する弾性率(感受率) χ_k が

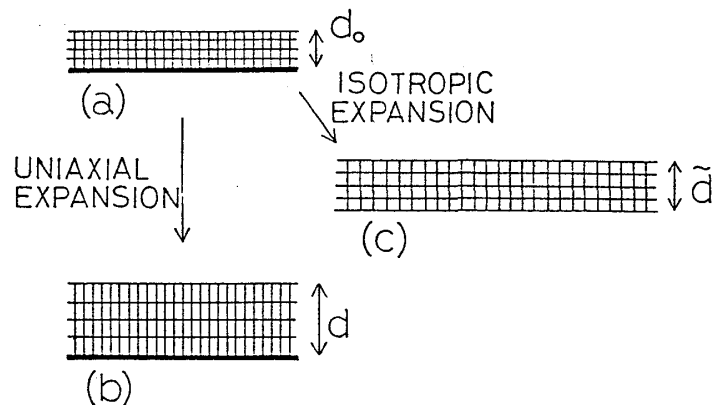


Fig. 1

$$\chi_k = \frac{1}{d^2} \varphi(k^2 d^2) \tag{2}$$

$$\varphi(x) \rightarrow \begin{cases} \varphi(0) + O(x) & x \rightarrow 0 \\ \varphi'(\infty)x + O(1) & x \rightarrow \infty \end{cases} \tag{3}$$

のように振舞う。ここで $\varphi(0) > 0$ で、又、 $\varphi'(\infty) < 0$ が不安定に対応する。この短波長の発散を抑える機構として(1)では歪み勾配に依存する項をもちこんだのである。簡単のため、モデルとして

$$\frac{1}{2} C_{lmn}^{\bar{l}\bar{m}\bar{n}} (\partial_l u_{mn}) (\partial_{\bar{l}} u_{\bar{m}\bar{n}}) = \frac{1}{2} C \left| \frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial z^2} \right|^2 \tag{4}$$

を仮定し、適当なパラメータ (K, μ, \dots, C) で χ_k (縦軸) で $k = 2\pi / (\text{波長})$ の函数として計算したのが図2である。又、この図の矢印で示したモードで変形したゲルの断面を図3に示した(振幅は誇張してある)。

実験でこの不安定を観測するには、膨潤度 d/d_0 と厚み d_0 を適当に小さくにとって、ごく狭い範囲の波長が不安定となるようにしなければならない。この臨界波長は、 d_0 のみを変えて測定する訳にはいかないので、 d_0 との比例関係を議論することは線形領域ではできない。

ここで、上で扱った系の $k < d^{-1}$ なる変形モードを、厚さ $2d$ の無拘束の弾性板の buckling と対比させて考察する(図4)。片面をのりづけした弾性板の変形はのりづけ面 ($z = 0$) を対称面とする varicose 型とみなせる。他方無拘束な弾性板の曲げモードは zigzag 型であり、中性面をもつ。前者での振幅 ϕ の変位は、厚み方向の伸縮による $\sim (\phi/d)^2$ のエネルギー(密度)増加と、面素 $dx dy$ の膨張によ

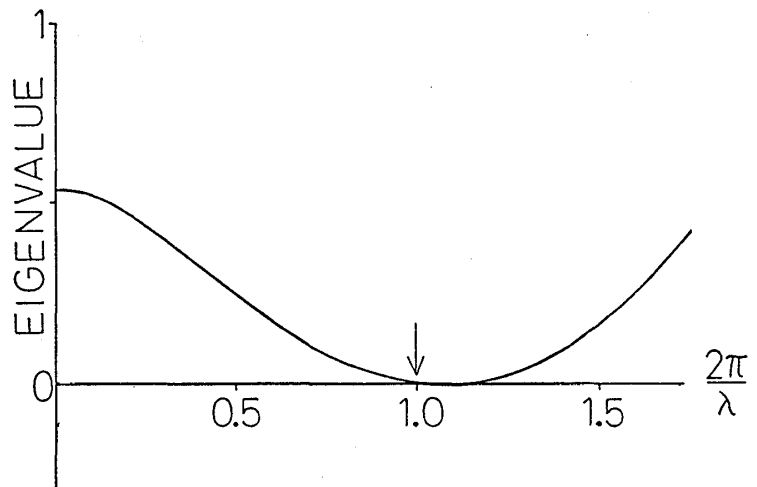


Fig. 2

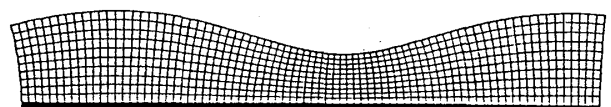


Fig. 3

る $\sim (\phi k)^2$ のエネルギー変化を与える。無拘束系においても, 中性面の膨張は $\sim (\phi k)^2$ のエネルギー減少を与えるが, 前者での $(\phi/d)^2$ に対応する長波長安定化の機構はない。それは, のりづけで回転対称を破っている系の歪み $\sim (\phi/d)$ のかわりに, $\sim d / (\text{中性面の曲率半径}) \sim d \phi k^2$ の歪みのみが生じているため, こ

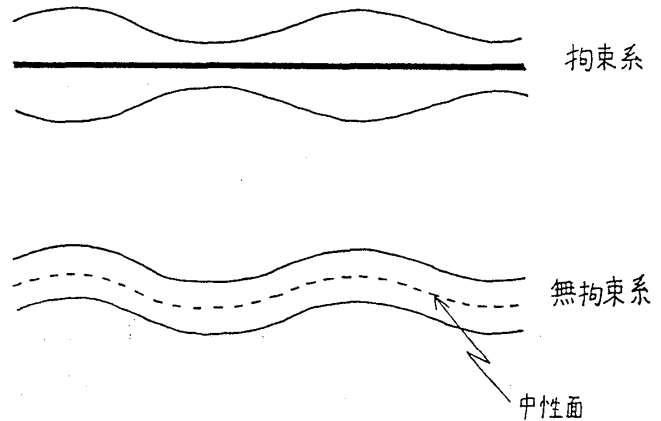


Fig. 4

れが無拘束系のエネルギー増加 $\sim (d \phi k^2)^2$ をもたらす。上記の対比は $dk \gtrsim 1$ では成立しない。(のりづけしたゲル板を, 表面に平行な薄いスライスの重なりとみなしても, その各々は内部に中性面をもたないので, 無拘束な弾性板とのアナロジーは使えない。)

本研究では膨潤したゲルの空間的変調構造を, 線形不安定性の立場から調べた。実際のゲル板に現われるパターンは, 著しい非線形の変形を示唆していて, この特徴を理解する為に, 上述とは違ったアプローチが今後期待される。また, 均一構造の安定限界が逆分枝型である可能性も非線形モデルで調べなければならない。もしそうなら, 空間的に局在した“しわ”がパターンの出現時から観測されることになる。

文 献

(ゲルの相転移)

T. Tanaka, D. Fillmore, S. -T. Sun, I. Nishio, G. Swislow and A. Shah: Phys. Rev. Lett. **45** (1980) 1630.

(ゲルの buckling)

T. Tanaka: Physica **140A** (1986) 261.

T. Tanaka, S. -T. Sun, Y. Hirokawa, S. Katayama, J. Kucera, Y. Hirose and T. Amiya: Nature **325** (1987) 796.

片山誠二: 現代化学 **No. 169** (1985) p 42.

(弾性板の曲げ)

L. D. Landau and E. M. Lifschitz: *Theory of Elasticity*. Pergamon Press (1959) §2.

(本研究の Letter)

'Elastic instability of gels upon swelling' K. Sekimoto and K. Kawasaki: submitted.